

五角星形的許願星

台北市立麗山高級中學數學科教師 彭良禎

又是鳳凰花開、驪歌飄揚的時日，每到大考前夕，總見考生與家長們在各大廟宇裡穿梭，而種種許願祈福的儀式，與其說是一種心靈寄託，不如說是考生在長期緊繃的最後時刻，出門透透氣，放鬆心情的一種 EQ 管理。許願的形式有很多，例如：默禱、許願池、祈福手環、摺紙鶴、摺許願星等等，本文即介紹許願星的摺法及其數學原理。



(圖一) 許願星及其素材 (長紙條)。

一、製作過程

器材：直接購買坊間的許願星摺紙包，或以約 A₄ 大小的廣告紙，依長邊方向剪裁成寬 1~1.5 公分的細長紙條一張。

建議：由於紙條過於瘦長，若以徒手摺、撕廣告紙的方式取材，容易造成紙張因延展而變形，故建議直接以直尺、美工刀或裁紙刀剪裁，除了確保長紙條維持長方形之外，若需教學使用時，還可立即「量產」。

步驟 1：在長紙條的一端打個「繩結」(圖二左)，然後慢慢整平，調整出一個正五邊形(圖二右)。

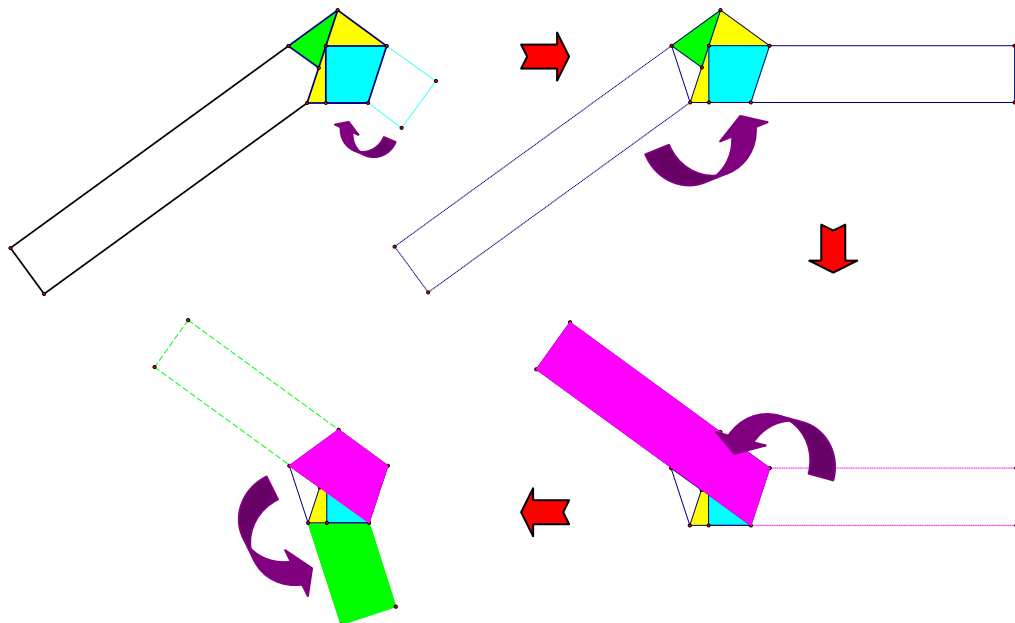
說明：打結時，紙條的一端越短越好，而整平成正五邊形是一種連續調整的過程，不宜立即將「紙結」壓扁，而需不斷地以目測方式，透過紙結中三個方向的紙條來互相牽制，完成許願星的起點~摺出正五邊形。



(圖二) 將長紙條打結(左)並「喬成」正五邊形(右)的示意圖。

步驟 2: 依正五邊形的邊, 先摺收長紙條較短這端(圖三左上), 然後再摺收較長那端(圖三右上、右下、左下), 直到紙條全部摺收完畢(約 9 次左右)。最後記得將紙條末端插入正五邊形上的紙條縫隙, 如此一來, 便不需剪刀、膠水來收尾。

說明: 由於一開始的正五邊形紙結是以目測的方式獲得, 再加上紙張在重疊之後, 會因為厚度造成摺紙誤差, 故在摺收紙條時, 宜適時加以修正, 使紙條的兩個長邊保持在正五邊形的對角線與邊的區塊位置。



(圖三) 長紙條摺收成正五邊形的簡略示意圖。

步驟 3: 當長紙條依正五邊形的外型摺收完後, 再以大拇指指尖從各邊中點向內摺, 使之凹陷並膨脹成立體的五角星(即許願星)。

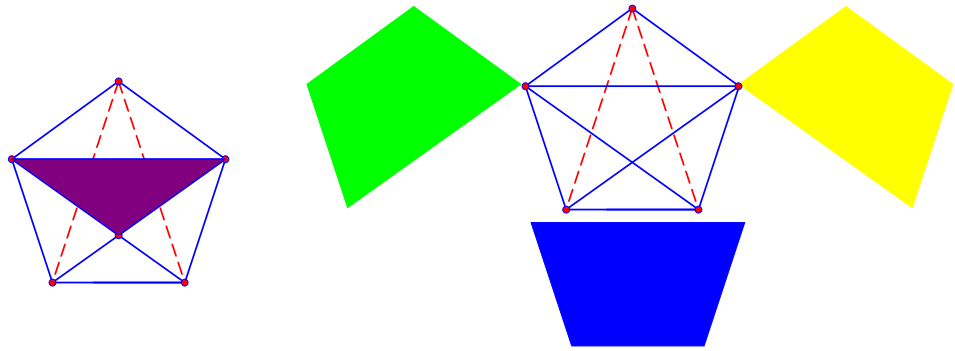
說明：若此時的正五邊形因太軟而不易摺陷成五角星，則宜重新裁減更長的長紙條，使之摺收成正五邊形時，其「紙壁」夠厚、夠堅硬。

二、數學原理

現象 1：長方形紙條打結出正五邊形。

原理：正五邊形的「三方全等」結構。

思路：三角形有三邊對應相等的 SSS 全等性質，而正五邊形的五個邊雖無相對的 SSSSS 全等性質，但正五邊形還有五條對角線，今任取其一筆畫的三條對角線，便可依黃金比例的分點位置架構出一個全等的黃金三角形（圖四左），此時若將每一條對角線與其切割正五邊形而成等腰梯形的部份相對應，則知：當三個梯形相互重疊交織出一個黃金三角形（圖四右）的同時，這三個梯形也就恰好圍出一個正五邊形。因此，「長方形紙條是否能打結出一個正五邊形」的問題，便簡化成「長方形紙條是否能分割成一連串 72° 、 108° 的等腰梯形結構」的問題（圖五）。



（圖四）長方形紙條打結出正五邊形的結構分析。



（圖五）長方形紙條分割成一連串等腰梯形的結構圖。

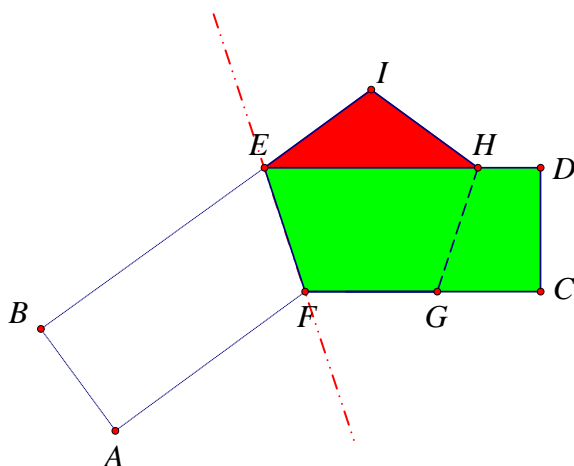
現象 2：不需剪刀、膠水，長方形紙條便可依正五邊形的邊摺收完畢。

原理：1. 摺紙是一個線對稱的操作，摺痕即為其對稱軸。

2. 正五邊形的一個外角是 72° 。

3. 正五邊形其內一條對角線將正五邊形切割成 72° 、 108° 的等腰梯形。

說明：如圖六，當紙條 $ABEF$ 依正五邊形的邊（即對稱軸 EF ）摺收時，因為 $\angle BEF = 72^\circ = \angle HEF$ ，所以紙條 $ABEF$ 的對稱形（紙條 $CDEF$ ）會剛好將等腰梯形 $GHEF$ 完全覆蓋，故不需剪刀、膠水，長方形紙條便可依正五邊形的邊摺收完畢。



(圖六) 長方形紙條完全摺收成正五邊形的原理分析圖。

三、後記

筆者在數學營隊或教師研習的教學分享中，都會將許願星的教學，安排在介紹正十二面體之前的熱身操作~認識正五邊形。目的便是希望學員能以數學放大鏡，察覺出潛藏在摺紙過程中的數學原理。經由互動和提示，學員通常能漸漸抓到關鍵之處。這當中最有趣的現象是，一開始發紙條要大家練習摺許願星時，很多小男生會露出「不好此道」的表情，甚至懷疑：幹嘛要學這種小女生的小玩意兒？接下來進入摺紙教學時，小女生各個都很厲害，而且都摺得很開心（很多人是本來就會摺了），而解說了半天，很多小男生都還狀況外，甚至打不出一個正五邊形的結（不知是學習能力差？還是仍不願跨出第一步？）等到終於學會許願星摺法，並認識其數學內涵時，這些小男生才比較願意客觀地面對此一摺紙操作。

【相關閱讀】

- 《發現月刊》第 151 期〈藝數家玩摺紙~基礎篇首部曲：數學摺紙〉、
- 《發現月刊》第 154 期〈藝數家玩摺紙~生活篇首部曲：正六邊形的平安符〉。

【心願星資訊】

- 1 顆☆：唯一的愛。
- 2 顆☆：相親相愛。
- 3 顆☆：我愛你。
- 11 顆☆：最愛。
- 36 顆☆：兩情相許。
- 66 顆☆：永不分離。
- 99 顆☆：天長地久。
- 101 顆☆：永浴愛河。
- 365 顆☆：願望成真。

【美的呈現】

