

「摺摺」稱奇——
從摺紙遊戲學習尺規作圖

譚克平

師大科學教所

2009年8月29日

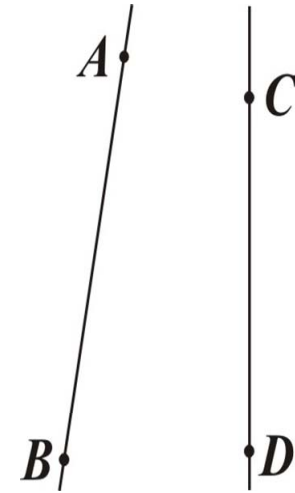
緣起

- 陳宥良老師尋找研究主題
- 一般學生學習尺規作圖的困難
- 例如:基到98-1第33題

如圖(十三)，直線 AB 、直線 CD 為不平行之二直線，
 今欲作一圓 O 同時與直線 AB 、直線 CD 相切，
 以下是甲、乙兩人的作法：

- (甲) 1. 過 D ，作一直線 L 與直線 AB 垂直，且交直線 AB 於 E
 2. 取 \overline{DE} 中點 O
 3. 以 O 為圓心， \overline{OE} 長為半徑畫圓，則圓 O 即為所求

- (乙) 1. 設直線 AB 與直線 CD 相交於 P
 2. 作 $\angle BPD$ 之角平分線 L
 3. 過 C ，作一直線 M 與直線 CD 垂直，且交直線 L 於 O
 4. 以 O 為圓心， \overline{OC} 長為半徑畫圓，則圓 O 即為所求



圖(十三)

對於兩人的作法，下列敘述何者正確？

- (A) 兩人皆正確
 (B) 兩人皆錯誤
 (C) 甲正確，乙錯誤
 (D) 甲錯誤，乙正確

- 您猜考生的答對率是多少？
- 應該如何教？

關於尺規作圖的學習

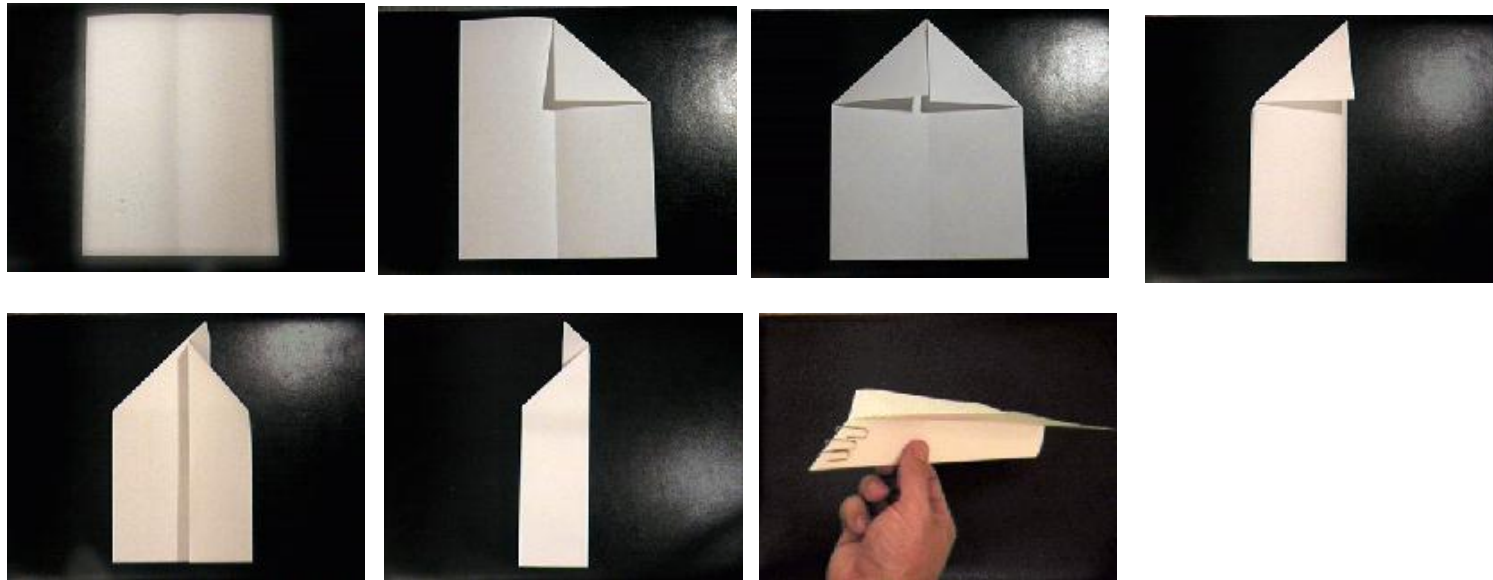
- 簡潔的工具使用方式：直尺畫線，圓規畫圓弧。
- 工具特性所產生的影響：
 - 限制
 - 學生無法使用日常經驗中熟悉的畫圖方式。
 - 要學習基本的尺規作圖動作並應用。

尺規作圖的困難

- 學生不清楚使用工具的限制。
- 基本尺規作圖動作雖不多,但可變化出很多應用。
- 不清楚基本尺規作圖能完成哪些基本圖形。
- 不容易判斷作圖結果與那些作圖步驟的關係。

童年的回憶—摺紙

- 紙飛機



- 摺紙的過程重複地應用對稱與平分的概念。

摺紙能用來作圖嗎？

- Yates(1949)指出，所有歐氏幾何作圖問題本質上均為尋找「所有交點的相對位置」。
- 但是...
- 如何摺出一個圓？
- 如果願意接受：
利用摺紙找出圓心與圓上任一點。

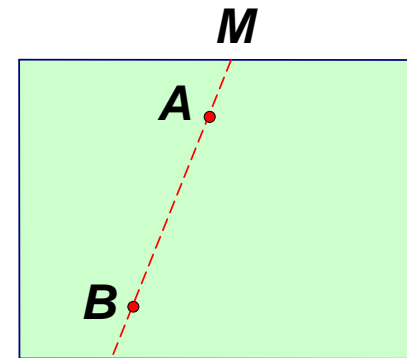
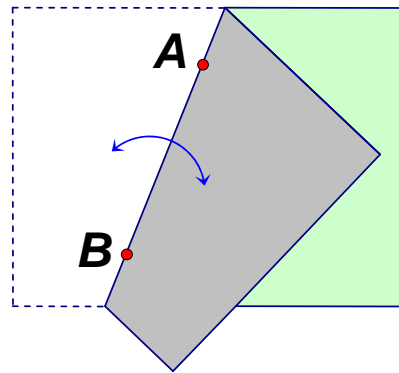
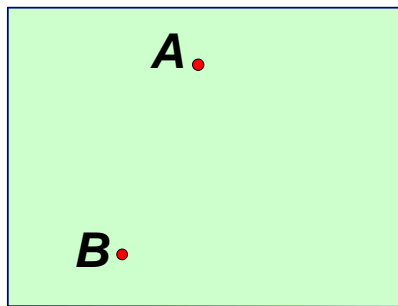
摺紙作圖基本假設

- 摺紙動作所產生的摺痕均視為直線，多邊形紙張的邊亦視為直線。
- 任意兩條不平行直線相交處視為一個點。
- 經紙張摺疊後可重合的兩線段或兩角均視為相等。
- 當一個作圖問題中所有交點的相對位置均確定後，此作圖問題即視為完成。

- 原先提出七個摺紙動作
- 試教後改爲六個動作
- 分別介紹如下

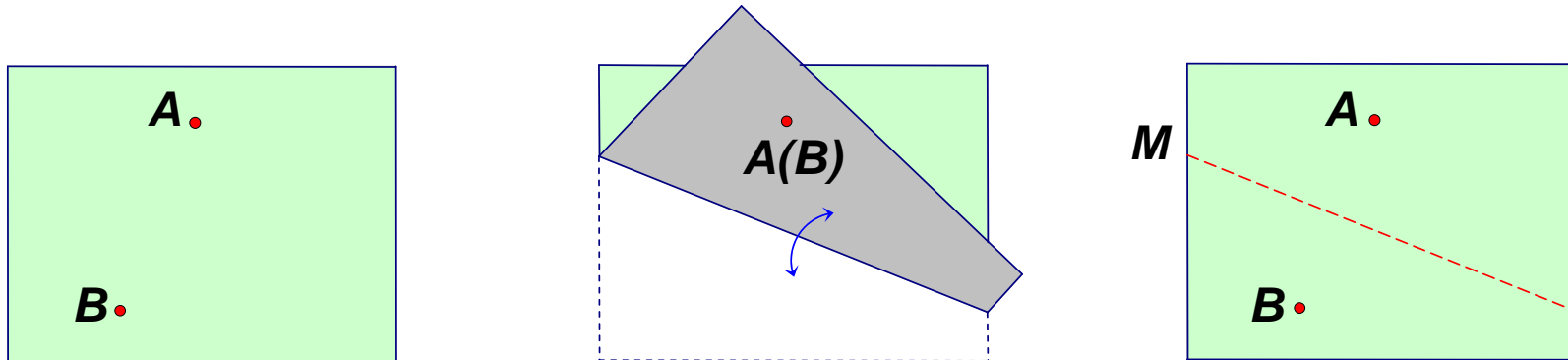
摺紙動作1 摺出通過兩點的直線

- 如圖，紙上有 A 、 B 兩點，可摺出摺痕 M 線通過此兩點。



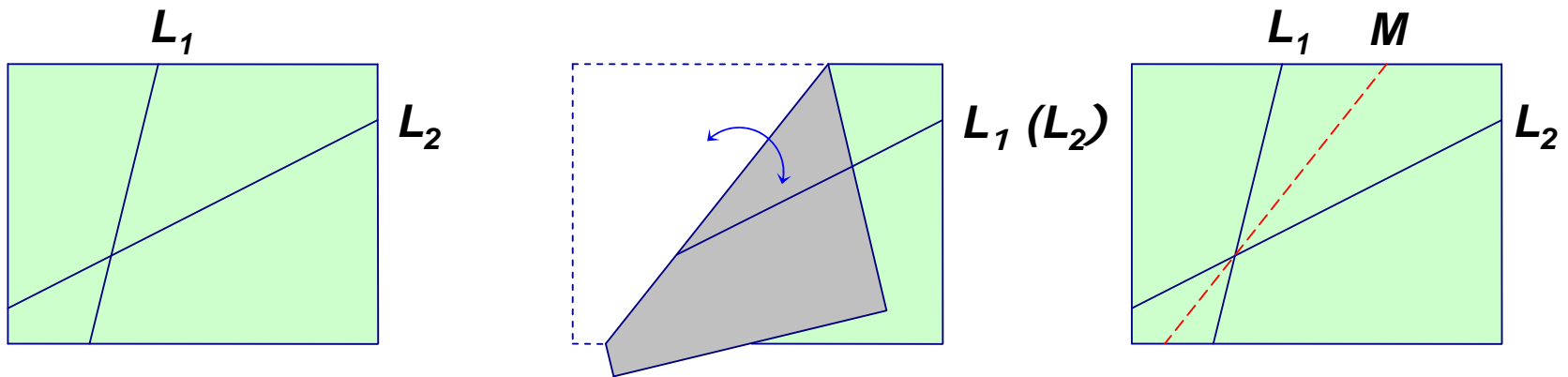
摺紙動作2 兩點重合

- 如圖二，紙上有A、B兩點，可摺疊紙張將A點與B點重合，此時所產生的摺痕M線為A、B兩點的對稱軸。



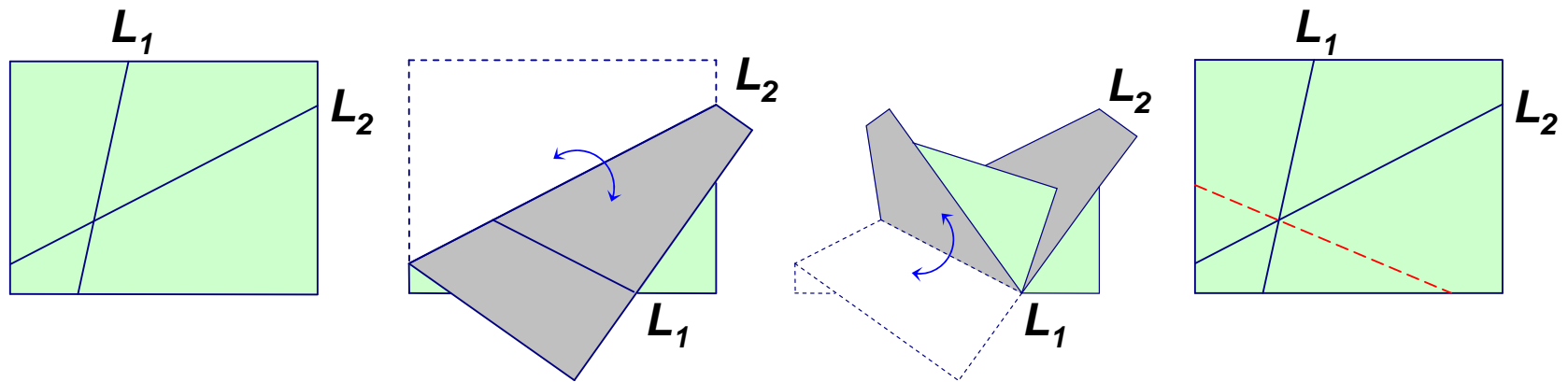
摺紙動作3 兩線重合

- 如圖，紙上有 L_1 、 L_2 兩直線，可將 L_1 與 L_2 重合，此時所產生的摺痕 M 線為兩直線的對稱軸



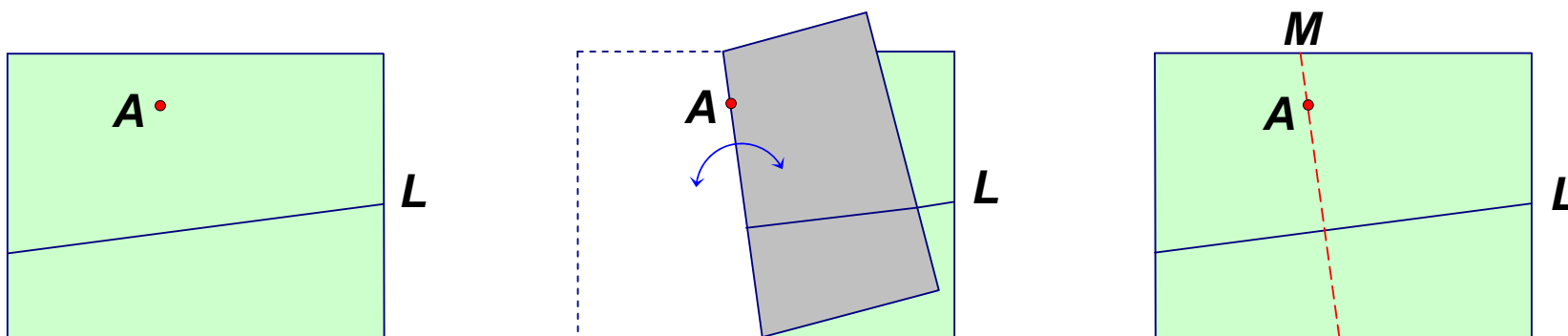
摺紙動作4 給定對稱軸搬線

- 如圖，紙上有 L_1 、 L_2 兩直線，先以 L_2 為摺痕將紙摺疊，在未攤開紙張的情況下，摺出與 L_1 重合的摺痕 M 線。(摺疊再摺疊)



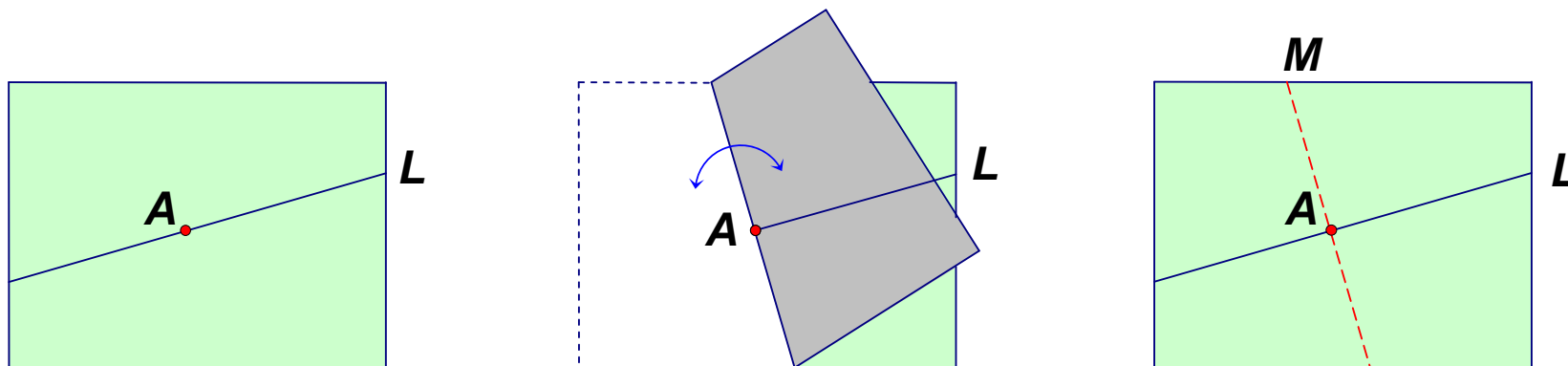
摺紙動作5 線外一點作垂線

- 如圖，紙上有一直線 L 與線外一點 A ，可摺出通過 A 的摺痕 M 線，且 $M \perp L$ 。



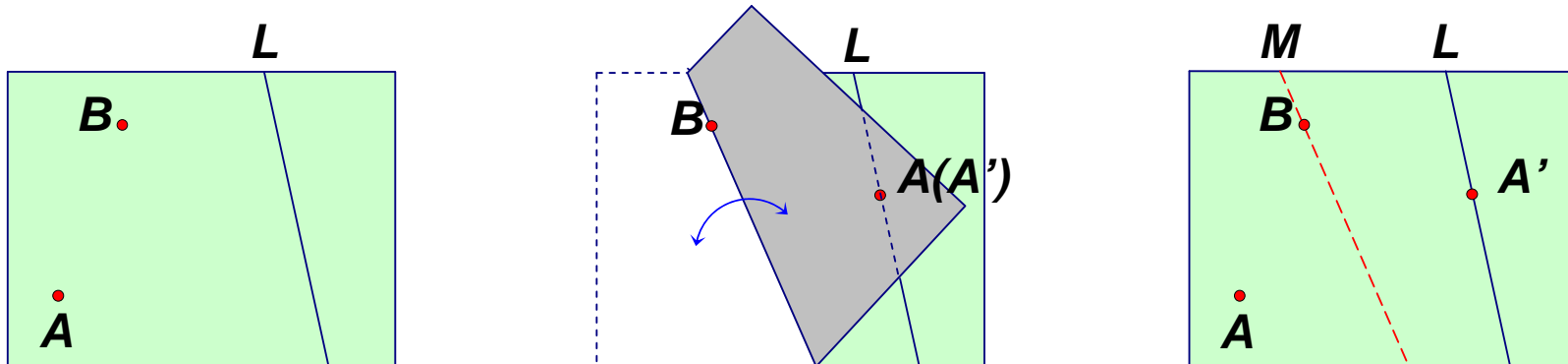
摺紙動作6 線上一點作垂線

- 如圖，紙上有一直線 L 與線上一點 A ，可摺出通過 A 的摺痕 M 線，且 $M \perp L$ 。



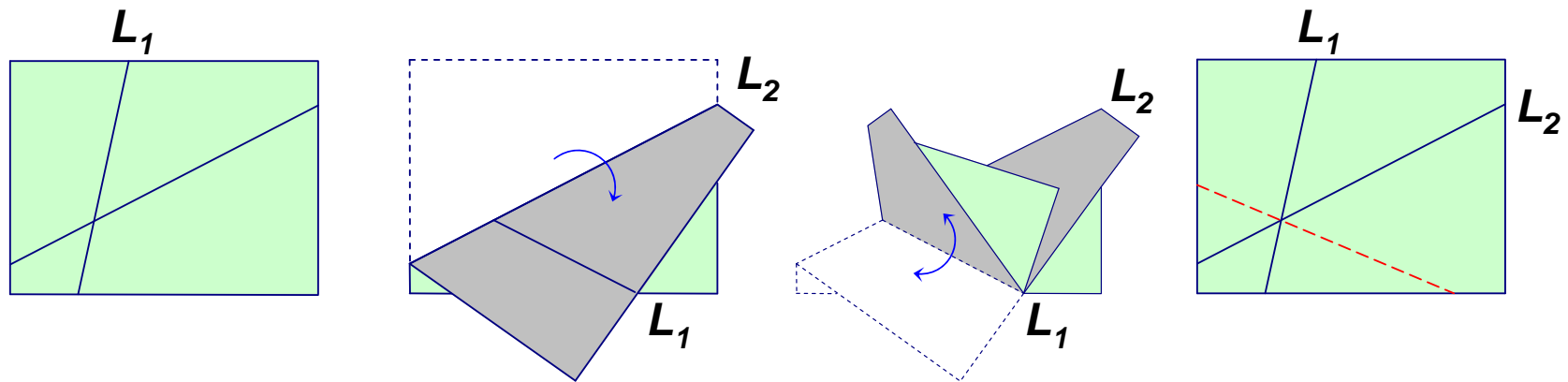
摺紙動作7 一點到一線，摺線過一點

- 如圖，紙上有一直線與 A 、 B 兩點，可將 A 點摺至直線 L 上（假設與 A' 點重合），且讓摺痕 M 線通過 B 。



學生學習摺紙動作時遭遇的困難

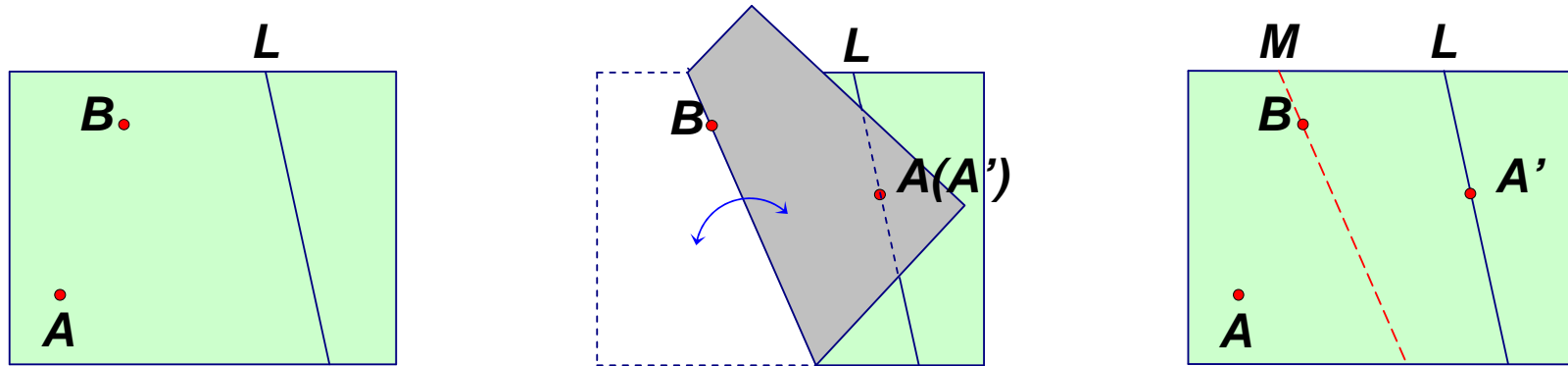
- 動作4（摺疊再摺疊）



- 由於動作4需要摺疊紙張兩次，容易造成學生在「未攤開紙張時」進行其它摺紙動作，進而產生非預期的摺痕。

學生學習摺紙動作時遭遇的困難

- 動作7（一點到一線，摺線過一點）



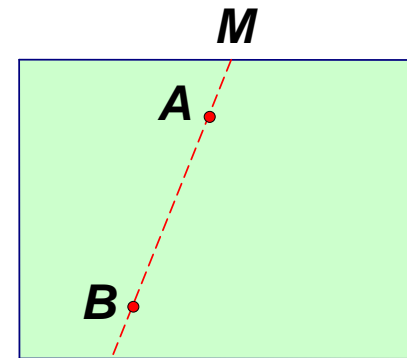
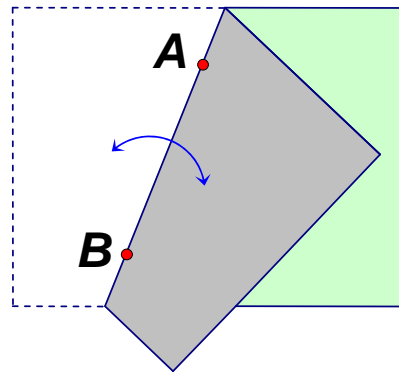
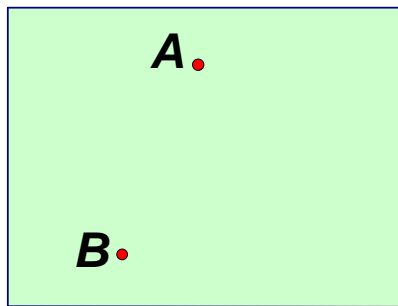
- 在利用動作7摺疊過程中，學生可「看見」 $AB=A'B$ ，然而攤開紙張後，只產生摺痕M，而未確定A'點位置。

摺紙動作改良版本

- 刪除動作4（摺疊再摺疊）
- 改良動作7（一點到一線，摺線過一點）：
使用筆點出A'位置。
- 改良版本：
 - 共有6個動作（重新編號）
 - 可解決所有尺規作圖問題
 - 每個動作均可轉換成尺規作圖作法

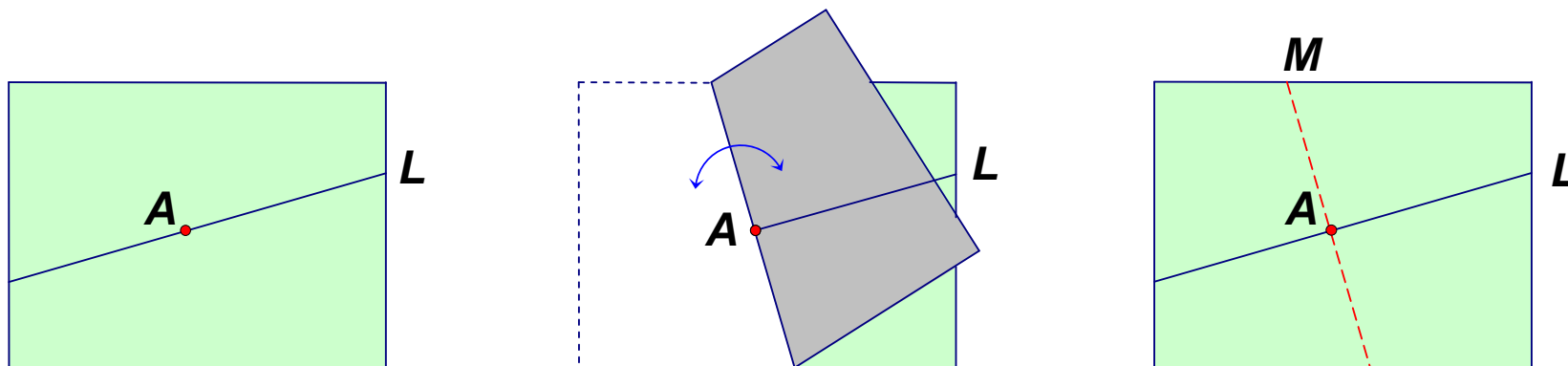
摺紙動作1 摺出通過兩點的直線

- 如圖，紙上有 A 、 B 兩點，可摺出摺痕 M 線通過此兩點。



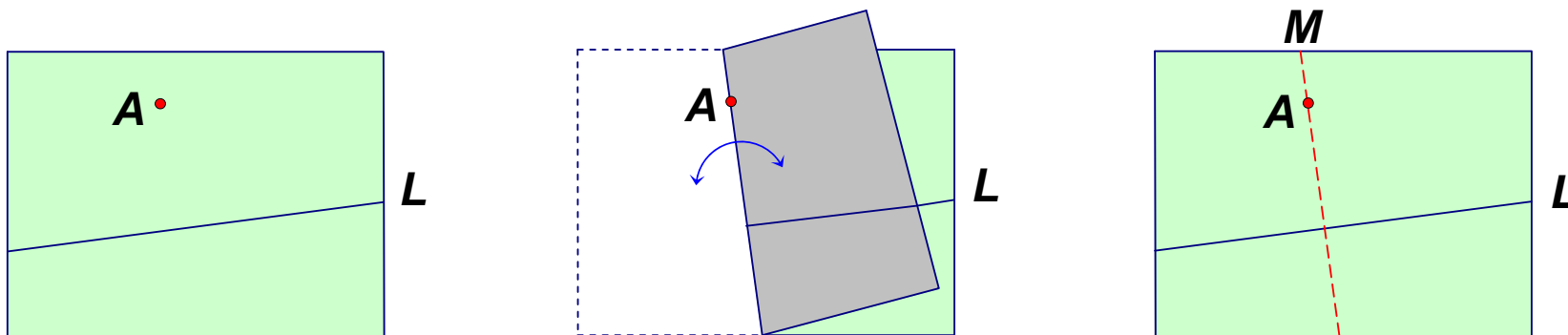
摺紙動作2 線上一點作垂線

- 如圖，紙上有一直線 L 與線上一點 A ，可摺出通過 A 的摺痕 M 線，且 $M \perp L$ 。



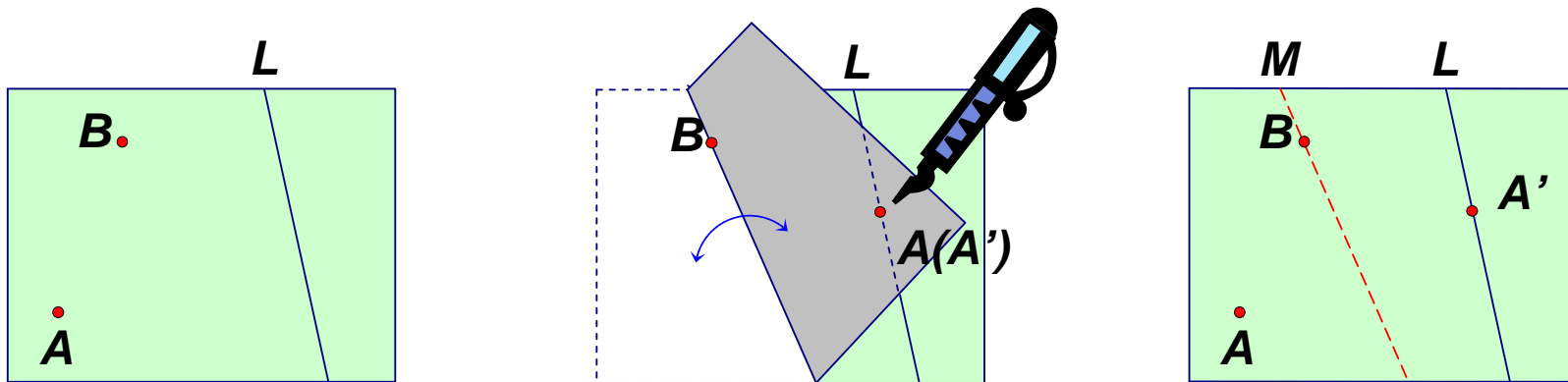
摺紙動作3 線外一點作垂線

- 如圖，紙上有一直線 L 與線外一點 A ，可摺出通過 A 的摺痕 M 線，且 $M \perp L$ 。



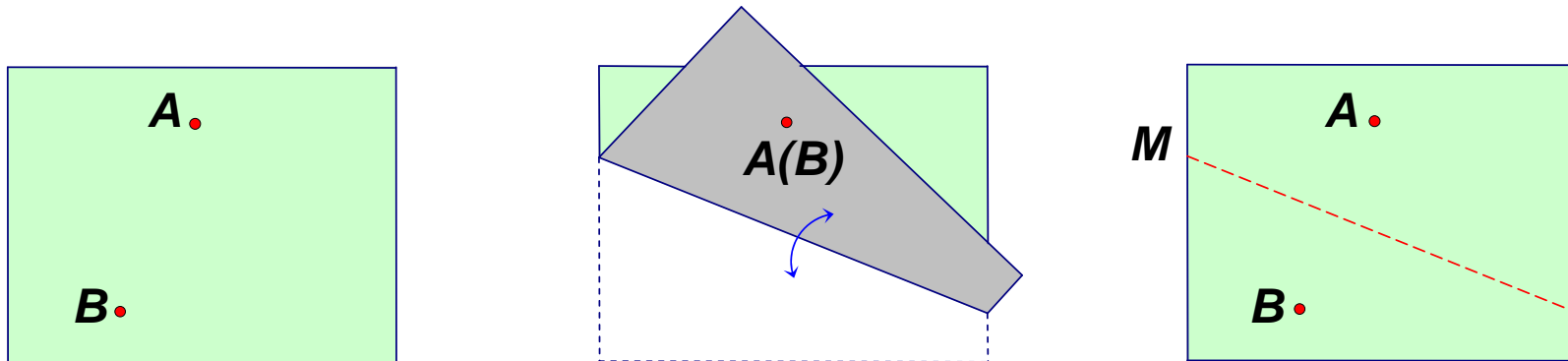
摺紙動作4 拿筆取點

- 如圖，紙上有一直線與 A 、 B 兩點，可將 A 點摺至直線 L 上（假設與 A' 點重合），且讓摺痕 M 線通過 B ，在未攤開紙張時，拿筆點出 A' 位置。



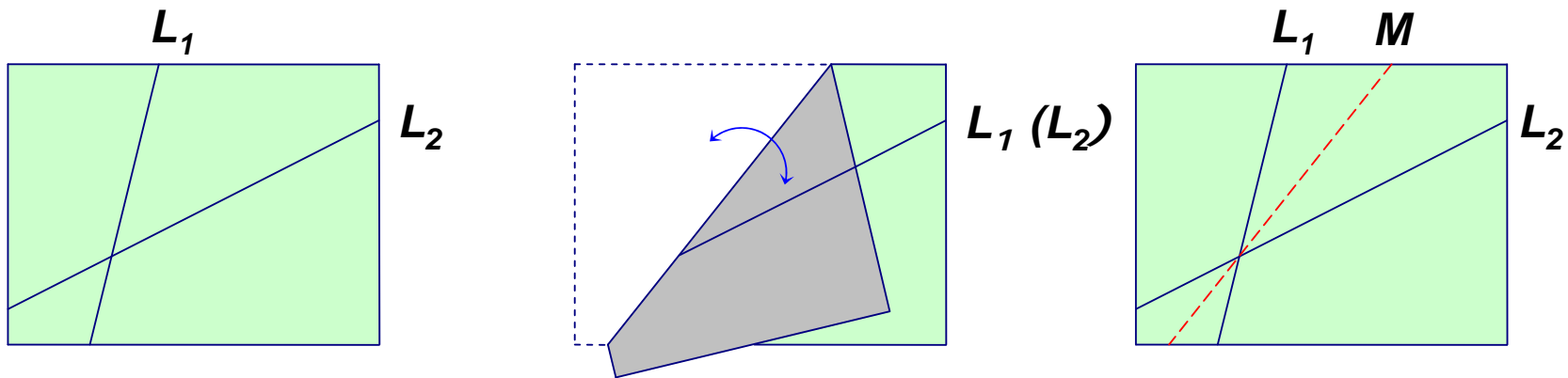
摺紙動作5 兩點重合

- 如圖二，紙上有A、B兩點，可摺疊紙張將A點與B點重合，此時所產生的摺痕M線為A、B兩點的對稱軸。



摺紙動作6 兩線重合

- 如圖，紙上有 L_1 、 L_2 兩直線，可將 L_1 與 L_2 重合，此時所產生的摺痕 M 線為、兩直線的對稱軸

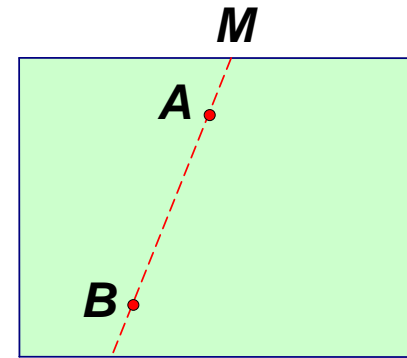
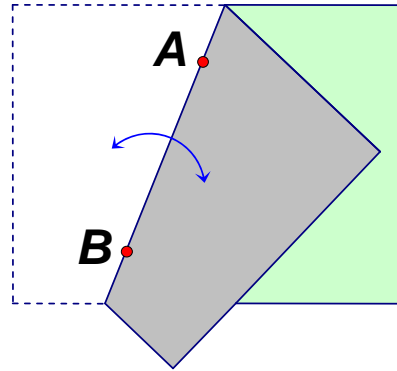
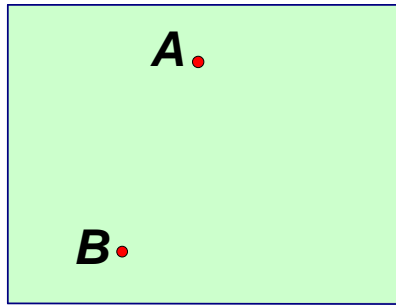


摺紙動作轉換成尺規作圖

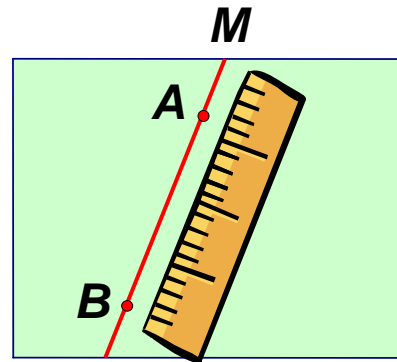
- 摺紙動作4的轉換目標為「找出A'點位置」。
- 其餘五個摺紙動作轉換的目標為「利用直尺與圓規畫出代表摺痕的直線」。

動作1所對應的尺規作圖

- 動作一（摺出通過兩點的直線）

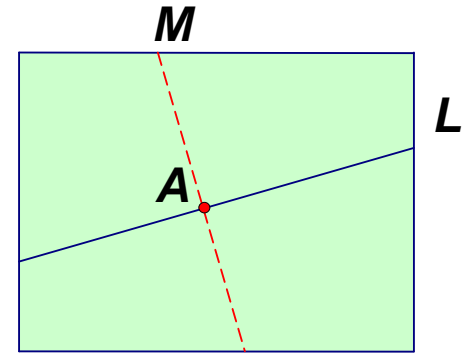
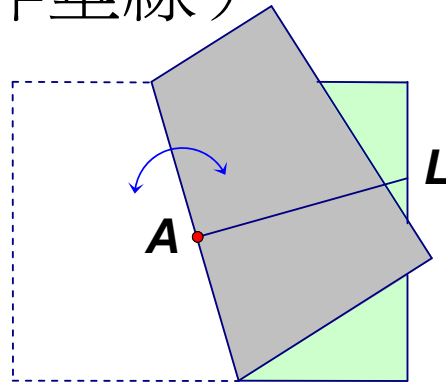
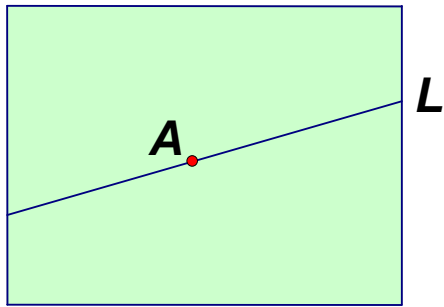


- 尺規作圖：利用直尺畫線

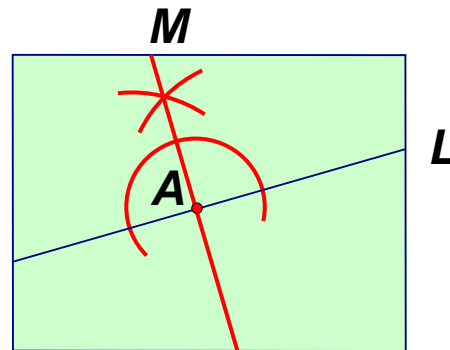


動作2所對應的尺規作圖

- 動作2（線上一點作垂線）

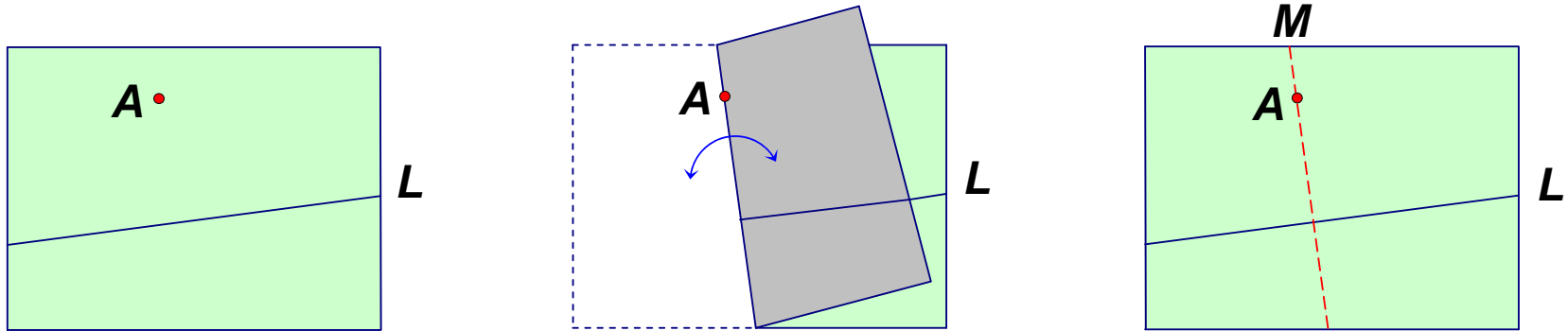


- 尺規作圖：線上一點作垂線

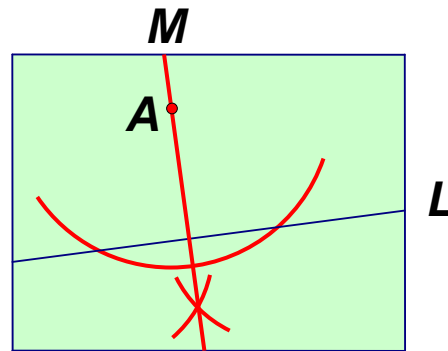


動作3所對應的尺規作圖

- 動作3（線外一點作垂線）

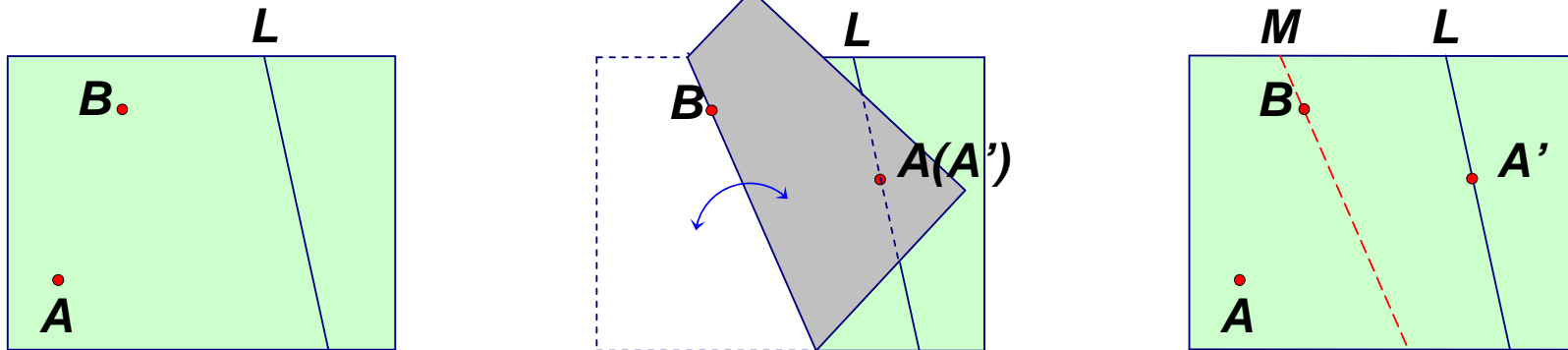


- 尺規作圖：線外一點作垂線

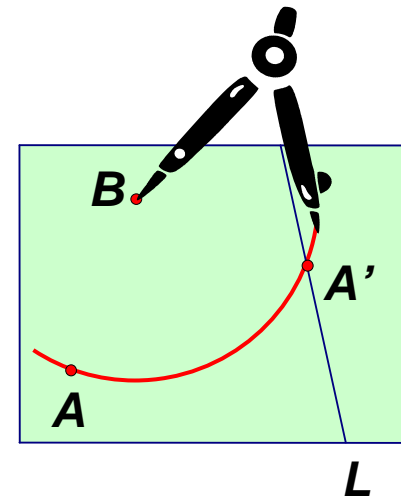


動作4所對應的尺規作圖

- 動作4（拿筆取點）

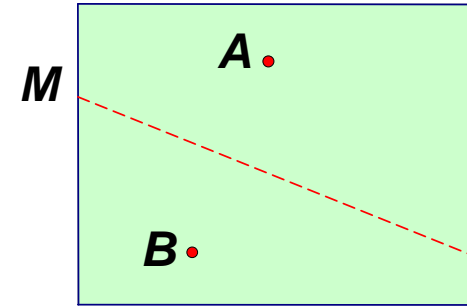
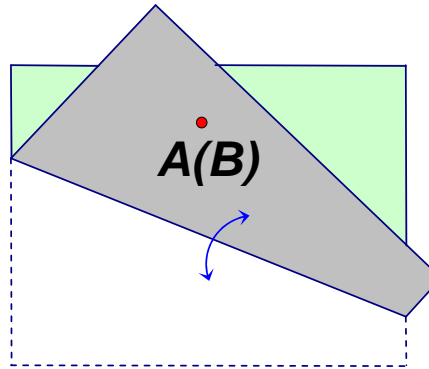
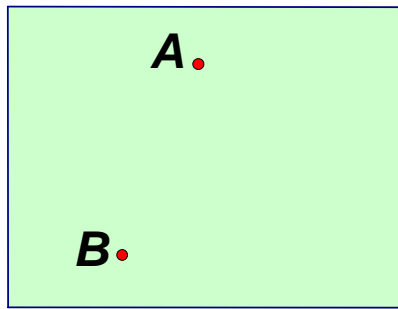


- 尺規作圖：利用圓規複製線段

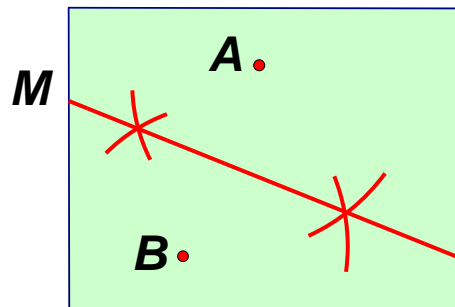


動作5所對應的尺規作圖

- 動作5（兩點重合）

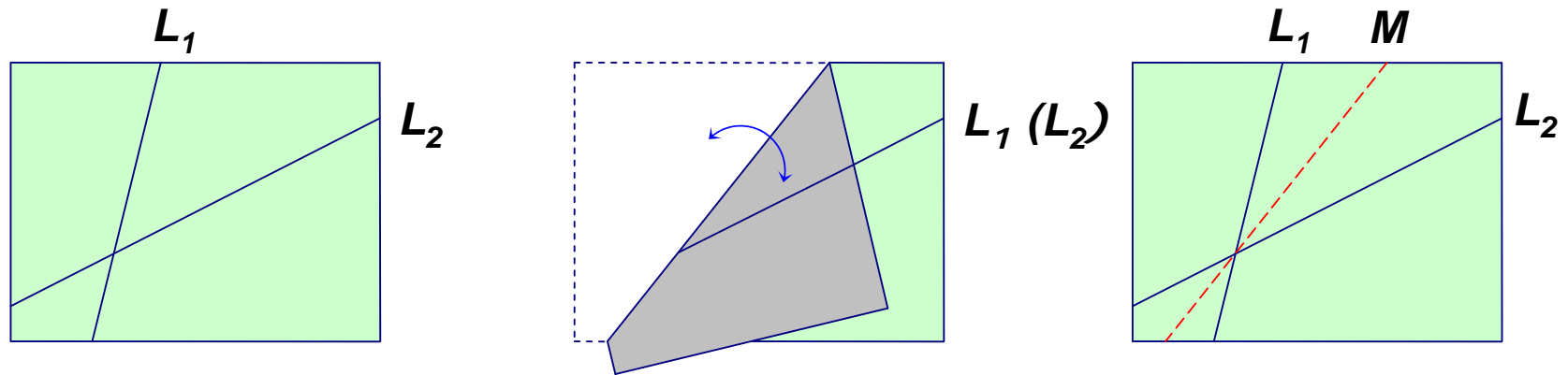


- 尺規作圖：中垂線作圖

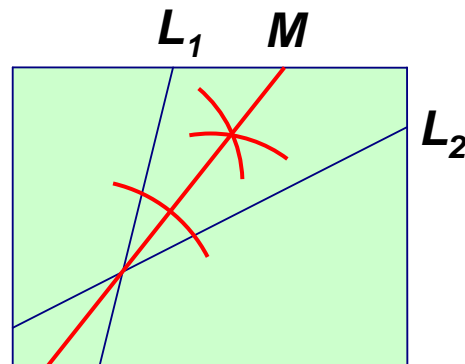


動作6所對應的尺規作圖

- 動作6（兩線重合）



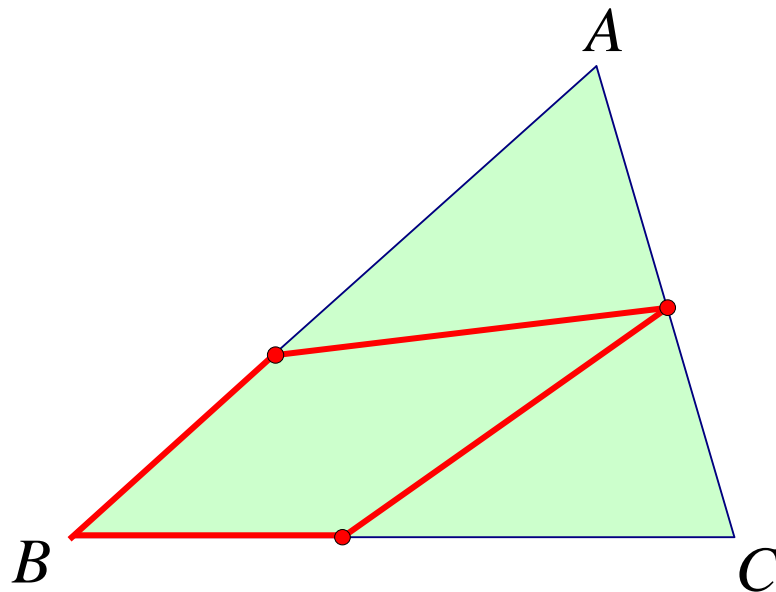
- 尺規作圖：角平分線作圖



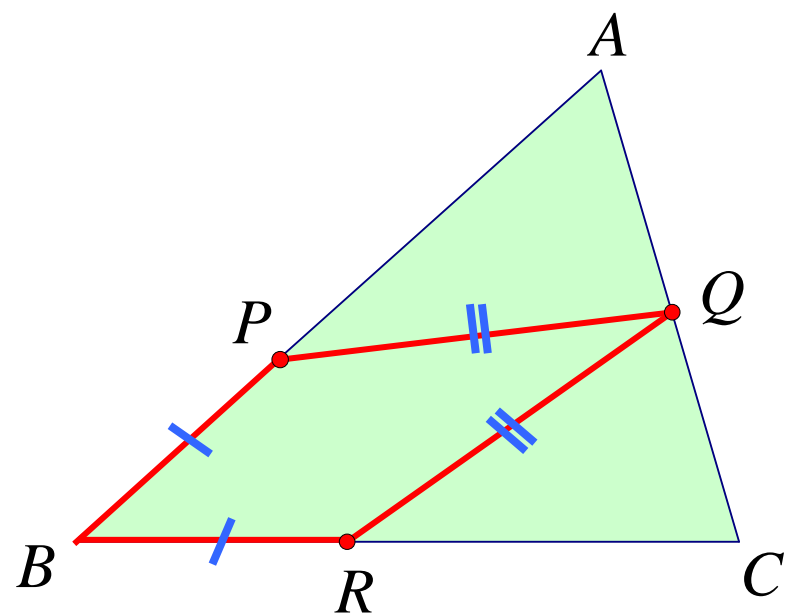
摺紙作圖範例一

- 作圖問題：

已知 $\triangle ABC$ ，請利用尺規作圖作出鳶形 $BPQR$ ，使得 P 、 Q 、 R 分別在 AB 、 AC 、 BC 上。

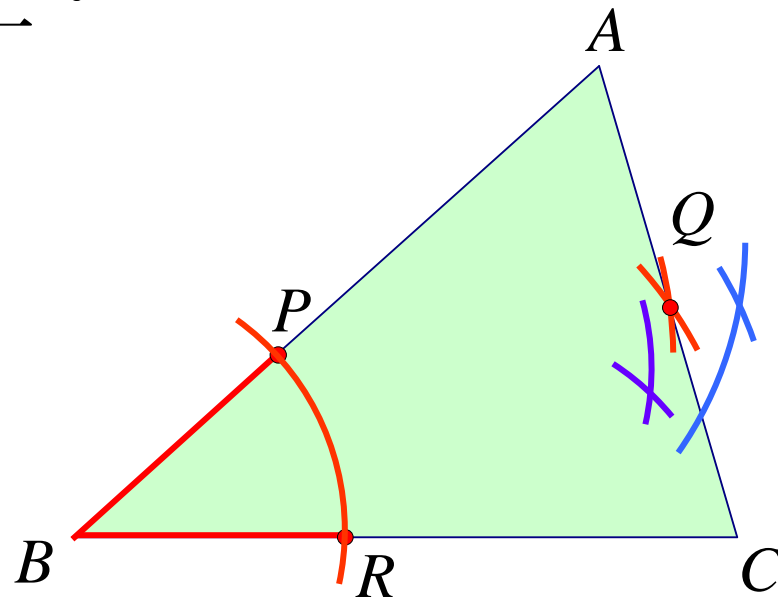


符合題目條件的草圖



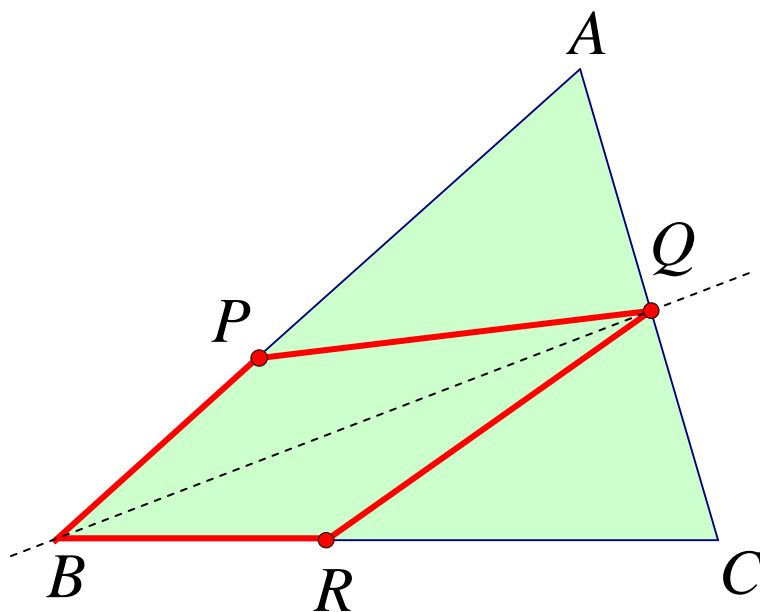
學生可能的作法

- 步驟1：作出 $BP=BR$
- 步驟2：作出 $PQ=RQ$ ，經多次嘗試後使得 Q 點落在 AC 上。



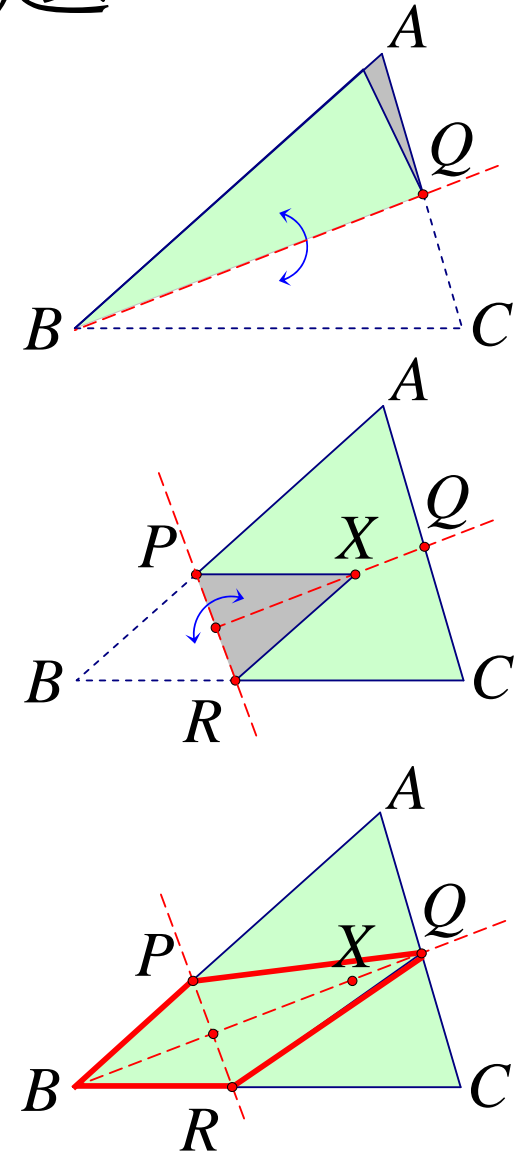
藉由摺紙幫助思考

- 摺紙過程中重複應用對稱概念，可引導學生觀察草圖的對稱性質。
- 鳶形為線對稱圖形，對角線**BQ**為其對稱軸。

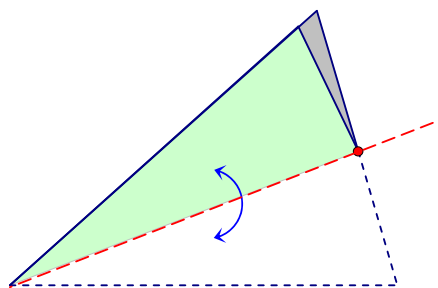


利用摺紙作圖解題

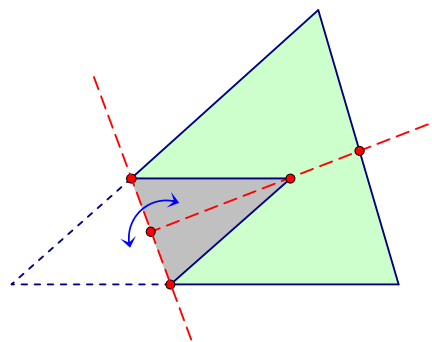
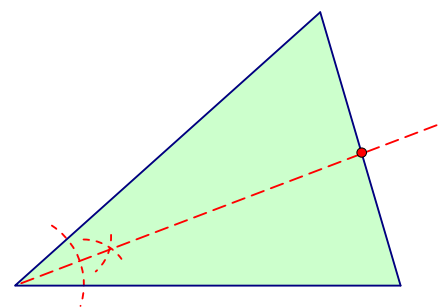
- 步驟一：將AB與BC兩線重合
- 步驟二：將B與X兩點重合
- 步驟三：摺出直線PQ與QR



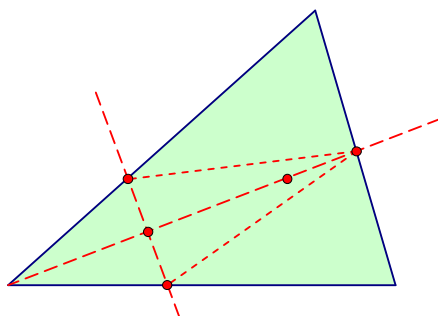
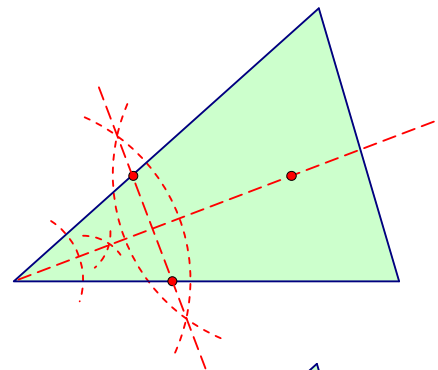
將摺紙動作轉換為尺規作圖



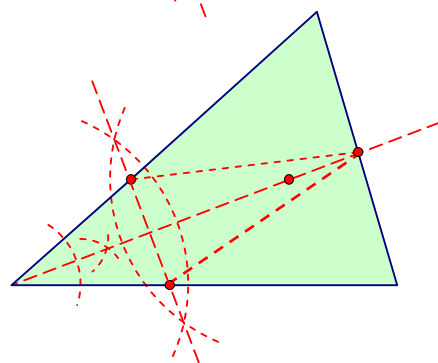
角平分線作圖



中垂線作圖

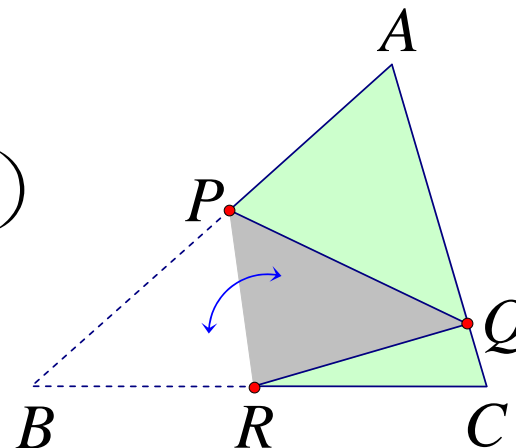


連接PQ與QR

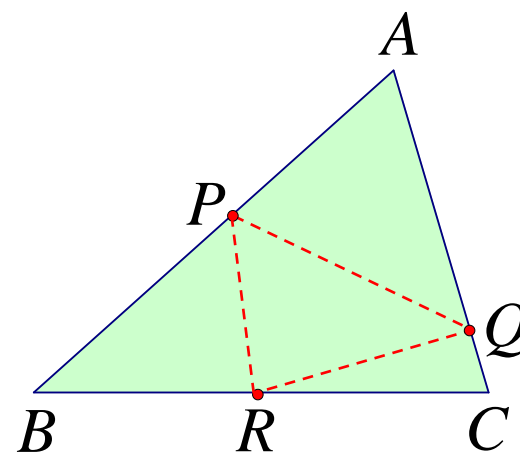


另一種摺紙作圖解法

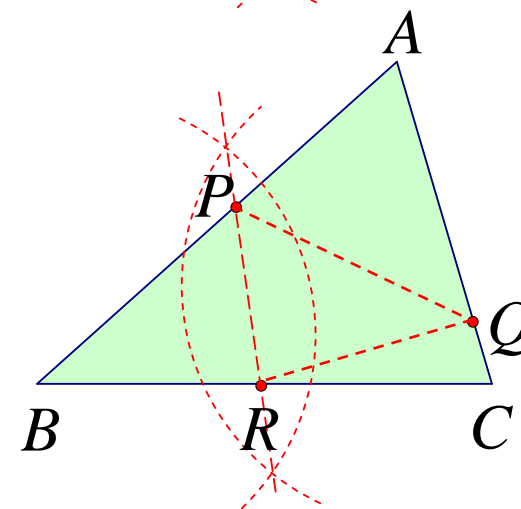
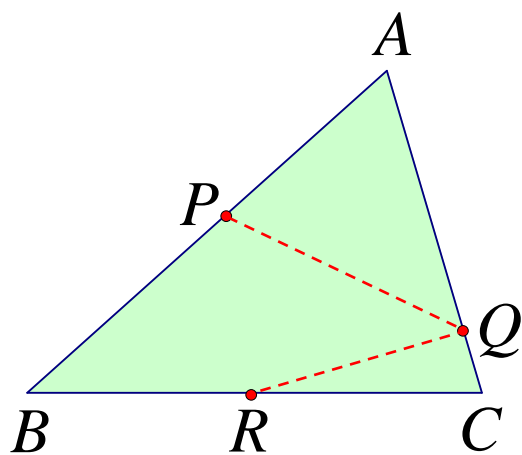
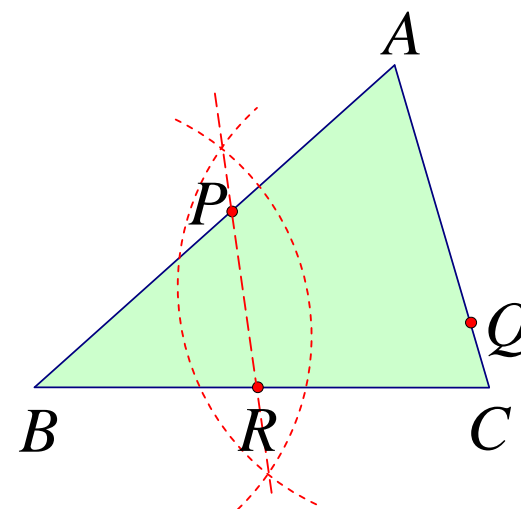
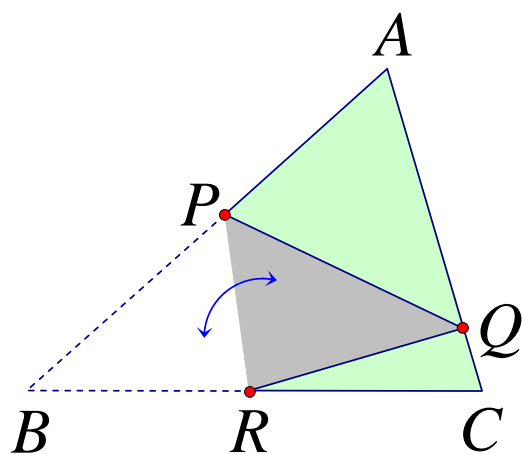
- 步驟一：將**B**與**Q**兩點重合
（**Q**為**AC**上隨意一點）



- 步驟二：摺出直線**PQ**與**QR**



將摺紙動作轉換為尺規作圖

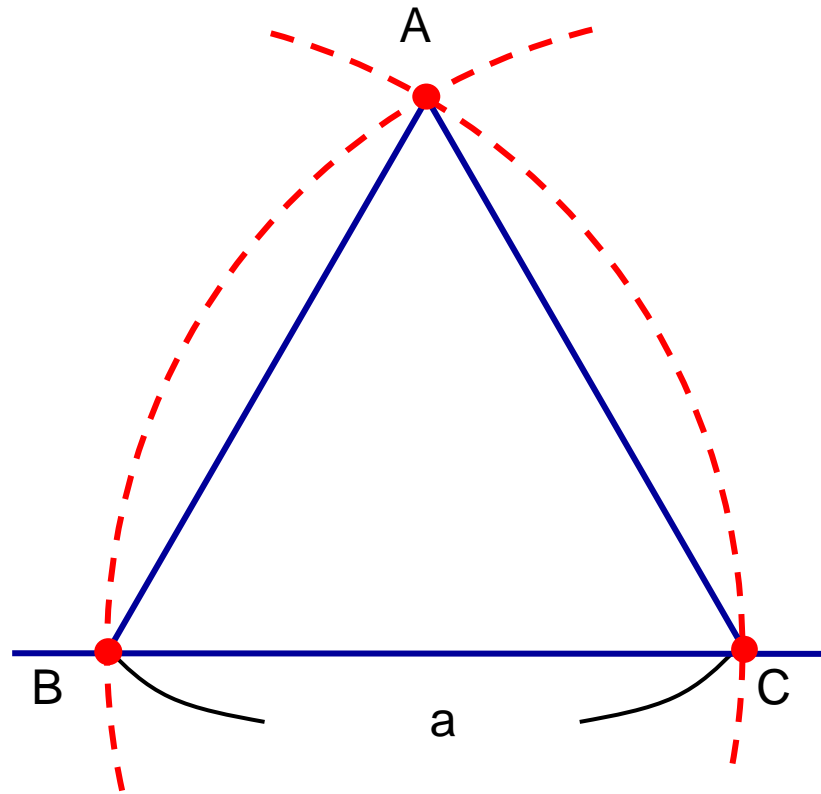


摺紙作圖範例二

- 作圖問題：
已知線段 a ，求作邊長為 a 的正三角形。

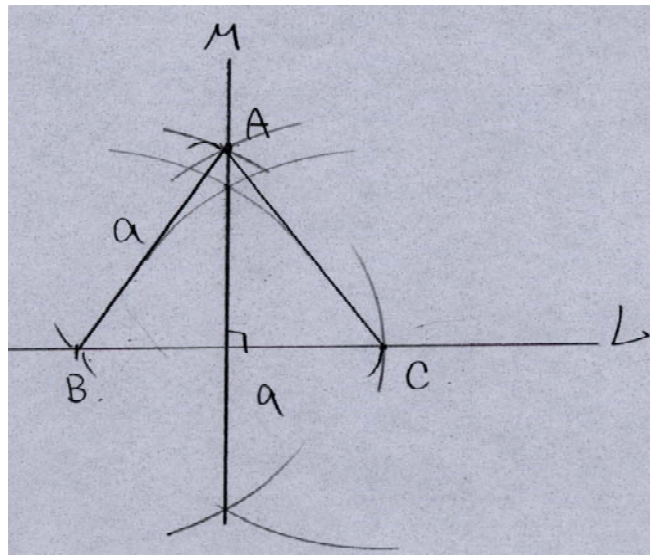


常見的正△作法



學生接受摺紙教學後的作法

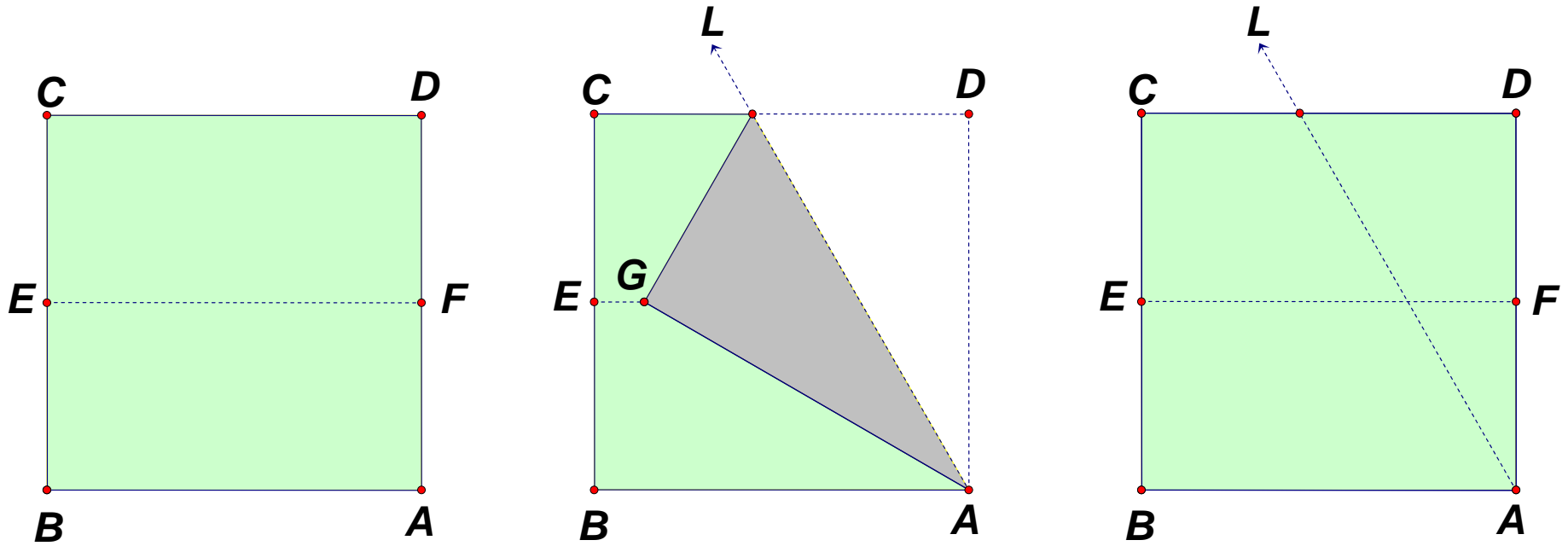
- 先畫出底邊的中垂線，再以底邊兩個端點為圓心、底邊長為半徑畫弧找出第三個頂點。
- 學生的解題想法：
正 \triangle 為線對稱圖形，第三個頂點在對稱軸之上。



摺紙教學應留意事項

- 摺紙只能留下摺痕
- 摺痕是線，不是點
- 要小心所看見的「結果」不一定是存在

摺紙教學應留意事項



透過摺紙學習尺規作圖的疑慮

- 透過摺紙學習尺規作圖時，需要比一般學習方式多記憶摺紙動作的轉換，是否將造成學生學習困難？
- 學生表示在思考尺規作圖時，喜歡用摺紙的方式思考
- 在尺規作圖過程中，會很自然地聯想到基本作圖所對應的摺紙動作，例如中垂線作圖即為兩點重合。

摺紙 vs 作圖軟體

- 比電腦軟體平宜
- 直觀
- (總會有些)怕電腦
- 不用很多時間即可學會基本摺紙技巧
- 但要翻譯為尺規作圖步驟
- 不夠精準

結語

- 過渡到尺規作圖：
- 可行的方式
- 起碼讓學生在解尺規作圖題時多一選擇
- 直觀、有趣
- (後段)學生可能會很接受
- 鼓勵一題多解

~~謝謝~~

t45003@ntnu.edu.tw