

正三角形摺紙

台北市麗山高中 彭良楨

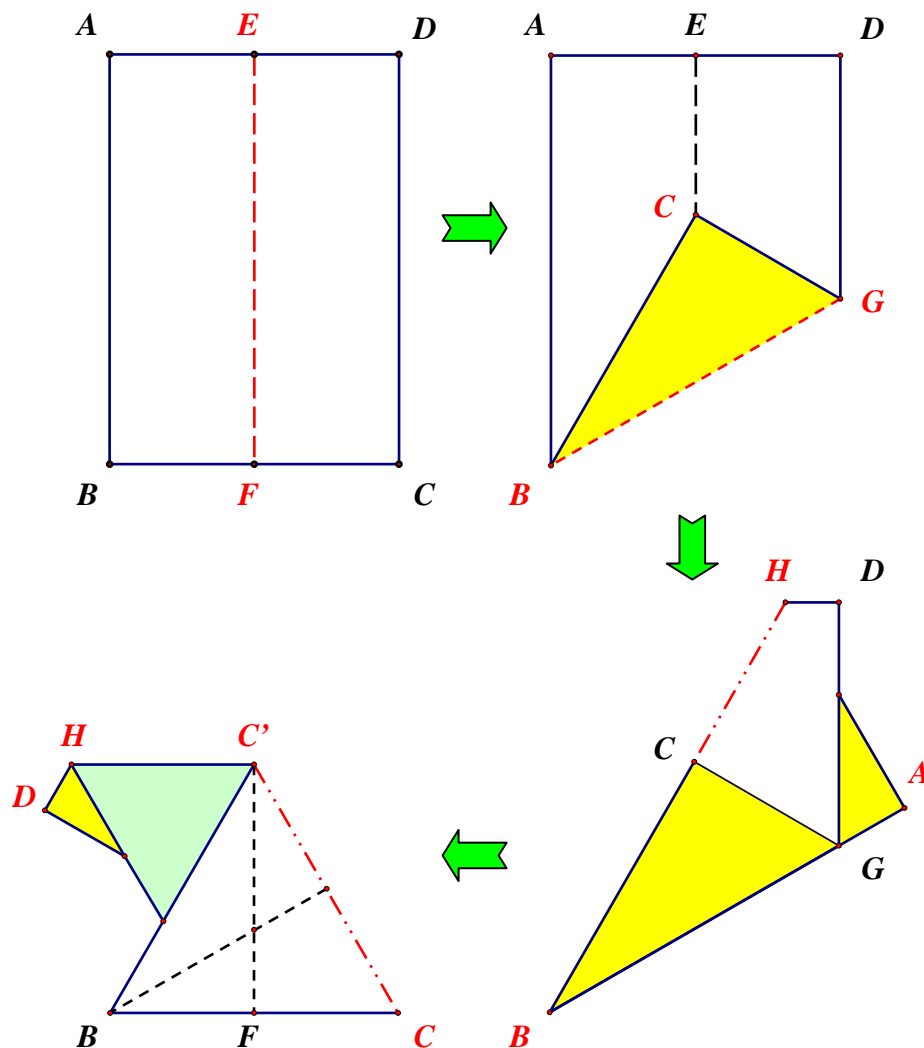
繼正方形摺紙之後，本文介紹從長方形紙張摺出正三角形，及其後續推廣至正 6 邊形、正 12 邊形、...、正 3×2^n 邊形的摺法與原理。

一、從長方形摺正三角形

已知：一張長方形紙張，例如：A₄ 紙張。

求摺：以寬為邊，摺出一個正三角形。

- 摺法：**
1. 將長邊 \overline{AB} 與 \overline{DC} 重合，摺出長方形 $ABCD$ 的對稱軸 \overline{EF} (圖一左上)。
 2. 調整 C 點位置，使之落在 \overline{EF} 上，藉以摺出谷線 \overline{BG} (圖一右上)。
 3. 接著再摺出山線 \overline{BC} (圖一右下)。
 4. 打開 $\triangle BCG$ ，再摺出山線 $\overline{CC'}$ ，則 $\triangle BCC'$ 即為所求 (圖一右下)。



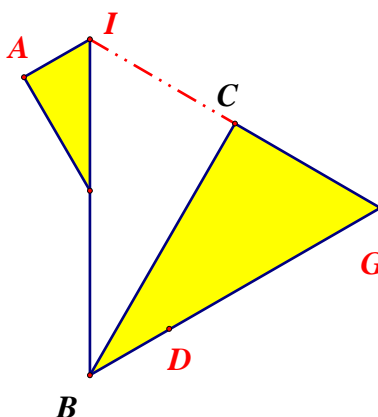
(圖一) 順時針方向圖解「正三角形摺紙」步驟。

說明：1. 此法的數學原理有二，一是「正三角形可視為底邊與腰長相等的等腰三角形」，二是「等腰三角形底邊的垂直平分線必過頂角」。因此，**摺法 1** 摺出的對稱軸 \overline{EF} ，其實就是摺出底邊 \overline{BC} 的垂直平分線。**摺法 2** 將 C 點落在中垂線 \overline{EF} 上，即是為了取得腰長與底邊相等的等腰三角形。**摺法 3** 先摺出一腰，此時 \overline{AB} 也會與 \overline{BG} 重疊，可用以校正誤差。**摺法 4** 摺出另一腰。

2. 若將角度的度量納入思考，則正三角形的摺紙操作也可改為 60° 角或 30° 角的摺紙操作。在**摺法 4** 中，打開 $\triangle BCG$ 即可得 $\angle C'BC = 60^\circ$ ，而從**摺法 1** 到**摺法 3** 摺出山線 BC 的一連串動作，則可視為「三等分 90° 角（ $=30^\circ$ 角）」的操作。

建議： 雖說兩點決定一直線，但要摺出**摺法 4** 的山線 CC' 容易造成誤差，故建議採左右對稱的方式，重複**摺法 2** 與**摺法 3** 的步驟，以獲得另一腰。

變通摺法 a： 若不限定正三角形的邊長大小，則可延續**說明 2** 的角度思維，由於**摺法 2** 所得的 $\triangle BCG$ 內角分別是 30° 、 60° 、 90° ，故可在**摺法 3** 時，改摺出山線 CG （同時藉 \overline{GD} 與 \overline{BG} 重疊來校正誤差），則 $\triangle BGI$ 亦為所求（**圖二**）。

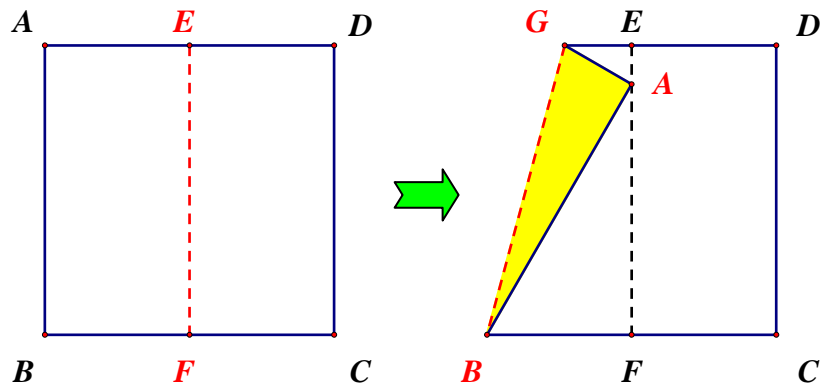


（圖二）圖解「正三角形摺紙」的變通摺法 a。

變通摺法 b： 原則上，從正方形摺正三角形的操作仿上述長方形的摺法即得，但亦見某些摺紙手法，特別融合角度與正方形等邊的思維，先摺出 15° 角。

1. 摺出正方形 $ABCD$ 底邊 \overline{BC} 的中垂線 \overline{EF} （**圖三左**）。
2. 調整 A 點位置，使之落在 \overline{EF} 上，藉以摺出谷線 \overline{AG} （**圖三右**）。

說明： 此時 $\angle GBA = 15^\circ$ 、 $\angle ABC = 60^\circ$ ，餘仿上述長方形的摺紙步驟即得。



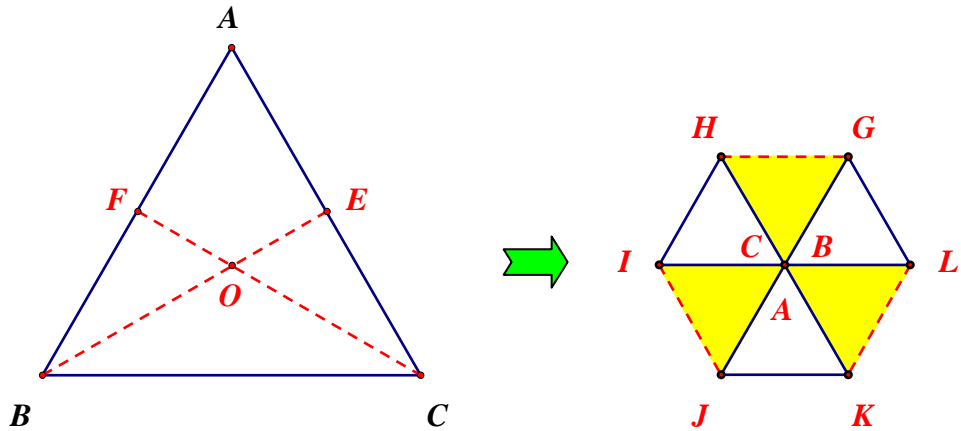
(圖三) 圖解「正三角形摺紙」的變通摺法 b 。

二、從正三角形摺正六邊形

已知：一張正三角形紙張。

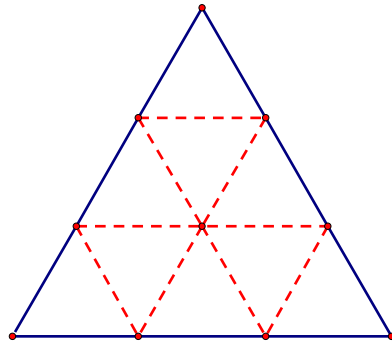
求摺：一個正六邊形。

- 摺法：**
1. 先摺出正 $\triangle ABC$ 的兩條對稱軸 \overline{BE} 與 \overline{CF} ，得交點 O (圖四左)。
 2. 分別將頂點 A 、 B 、 C 摺與 O 點重合，摺出 \overline{GH} 、 \overline{IJ} 、 \overline{KL} ，即可得一個正六邊形 (圖四右)。



(圖四) 圖解「正六邊形摺紙」步驟。

- 說明：**
1. 正三角形的重心、內心、外心與垂心 4 心合一，故所摺的對稱軸也是其中線、角平分線、中垂線與高。由於「一個正六邊形可等分成 6 個正三角形」，故此摺法巧妙地套用「一個大的正三角形等分成 9 個小的正三角形」的幾何結構，所得正六邊形的頂點 G 、 H 、 I 、 J 、 K 、 L 即是原來正三角形各邊的三等分點位置。



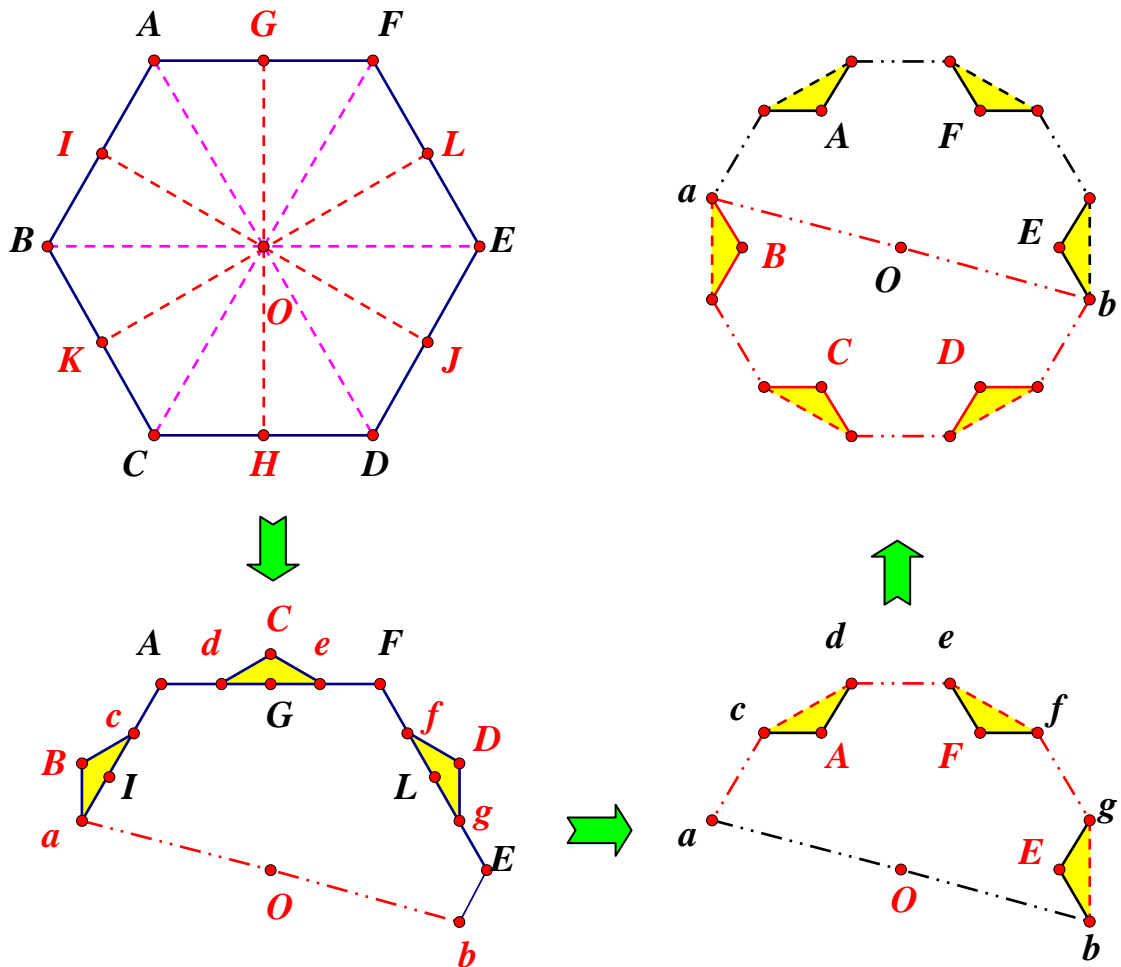
(圖五) 圖解「正三角形9等分」結構。

三、從正六邊形摺正十二邊形

已知：一張正六邊形紙張。

求摺：一個正十二邊形。

- 摺法：**
1. 先摺出正六邊形 $ABCDEF$ 的 6 條對稱軸 (圖五左上)。
 2. 以山線方式摺出 $\angle BOI$ 的角平分線 \overline{ab} (圖五左下)。
 3. 分別依原正六邊形的邊緣摺山線 \overline{ac} 、 \overline{de} 與 \overline{fg} ；谷線 \overline{cd} 、 \overline{ef} 與 \overline{gb} (圖五右下)，打開摺線 \overline{ab} ，即得一正十二邊形 (圖五右上)。



(圖五) 逆時針方向圖解「正十二邊形摺紙」步驟。

說明：正十二邊形有 12 條對稱軸，其中 6 條是對角線，另外 6 條是平行邊中點的連線。**摺法 1** 是先摺出後者；**摺法 2** 則是透過 $\angle BOI$ 的角平分線來取得前者，雖只摺出其一，但此時點 c 、 d 、 e 、 f 、 g 即是其他對稱軸的端點位置，故最後再以**摺法 3** 來摺出正十二邊形的所有頂點。

建議：在**摺法 2** 摺出 $\angle BOI$ 的角平分線 \overline{ab} 時，不僅 \overline{OB} 會摺疊到 \overline{OI} 上， \overline{OK} 、 \overline{OC} 、 \overline{OH} 、 \overline{OD} 、 \overline{OJ} 也會分別摺疊到 \overline{OA} 、 \overline{OG} 、 \overline{OF} 、 \overline{OL} 、 \overline{OE} 上，故可藉此修正誤差。

推廣：理論上，從正 3×2^n 邊形摺出正 $3 \times 2^{n+1}$ 邊形的方法仿此即得，但在實際操作上，會因為正 3×2^n 邊形越來越趨近於圓，而面臨精準度的挑戰。

【相關閱讀】《發現月刊》第 151 期〈藝數家玩摺紙~基礎篇首部曲：數學摺紙〉、
第 152 期〈藝數家玩摺紙~基礎篇二部曲：正方形摺紙〉。