

當探討數學與文化間的關連時，民族數學（ethnomathematics）的研究是一個相當重要的課題。去年八月二十二～二十九日在西班牙薩拉戈薩（Zaragoza）所舉辦的第十九屆國際科學史研討會，民族數學也被當成一個小組討論的議題（Ethnomathematics, ethnoscience and the recovery of world history of science），由巴西的 Ubiratan D'Ambrosio 和莫三鼻克的 Paulus Gerdes 共同主持。其目標是經由數學史及科學史之研究取向，表達對民族文化自主及多元文化的關懷。本文的主要目的即是簡單介紹所謂的民族數學；並從《東京人類學會雜誌》上摘譯伊能嘉矩先生所撰述的〈台灣土蕃の數の觀念〉。希望藉由「原住民對數的掌握」這樣的題材，來看看屬於我們自己的民族數學。

民族數學

什麼是民族數學呢？根據 M. C. Borba 的說法，所謂的民族數學就是「特定文化族群所表現出來的獨特數學概念」。值得注意的是，在其這裡的「ethno」和「mathematics」應該用更宏觀的角度來考量。「ethno」不再如過去般僅僅代表生物性的「種族」，而是意指「文化族群」。此外，舉凡做算術、歸類、排序、遞推、統計等等一系列的活動都可稱為「mathematics」。在不同的時代、不同的地點，人們由於生活的需要，或者為了對周遭的現象尋求解釋，會隨著各自的文化環境，發展出一套解決問題的工具、技術和理論。由於長久以來，科學史上一直存有以歐洲為中心的特性；在歐洲思想獨領風騷的氛圍下，民族數學往往會被誤解為是下品的、第二流的數學，而不是不同文化背景所體現的數學概念。這正是今日科學教育家所欲極力導正的觀念，因為不同民族的文化遺產都值得珍視，也是後代子孫的寶藏。

以下就是伊能嘉矩先生所著的〈台灣土蕃の數の觀念〉（1906、1907）一文之部分摘譯。

台灣原住民的數的觀念

泰雅族

台灣北部山中居住著泰雅族人，可分為東西兩部族。茲把東西二部族數詞間的差異略述如下：

一、東部部族：數詞從一至一千。最高的固定數詞到百為止，並且從六十到九十及一千這幾個數詞，都有合成語的現象。六十以上的十位數只需在單位固定數語後添加十。此外，在六和八這兩個固定數語，也都有合成語的痕跡。亦即六是把三置於後，前面加上一個表示複數的「Ma」（同理，八即是 Ma-Sepat = 4×2）。

二、西部部族：數詞從一至一萬，固定數詞甚至可達萬。並且從六十到九十及一千這幾個數詞，也都有合成語的現象。六十以上的十位數語在單位固定數語後添加表示十倍的語詞「Pongan」。

三、綜合說明：東西兩部族語應都根源於馬來語系。此外，數的計算法相當簡易，例如，二十一的表示法就是二十後面加上一，數語和數語之間並沒有加減等助詞的連接。可是雖然數的觀念很發達，但實際的操作卻還是從一到十反覆的計算。當每計算一回十時，便運用石塊木片等記識，例如石塊有四個而餘數為五時，就計算為四十五。在抽象的計數方面，則是利用雙手，先從一隻手的拇指開始，依序數至小指，再換另一隻手如法計數。如果表示以十為單位時，就張開兩手，然後一起翻回。兩個十，那麼

就是二十了。世界上很多地方都有指算法，馬來語系就常把手和五當同一件事。在西部部族，五也有「拿」的意思，這是因為拿東西時必須屈折五指，就與計數五時一樣。

附帶在計數法一提的，是度量衡思想發展的程度。就尺度的觀念而言，因為和中國人交換布匹等緣故，所以使用了三種標準，即（一）指極尺（伸長兩手時，指極之距）、（二）半指極尺（一手伸直，從前胸的中央到指極之距）、（三）手指尺（拇指至食指之距）。但是量衡的觀念就比較缺乏，和中國人交換米鹽之時，往往用所戴的帽子裝盛，而有特定的交換物。或者用手比較物品的輕重。在數目的記載上則不十分發達，繩結是表示法之一。

這裡也有關於奇數的迷信，因為奇數就是難等分的數，稱之為「Megijin」；相對的，偶數就稱之為「Ine-Megijin」，其中「Ine」為否定助詞。例如準備要出征獵殺人頭時，預先出發站在路旁傾聽鳥聲以占卜吉凶的一行人數，也避諱奇數，一定要二人或四人等。

對於無限多數，人類常用生活伴隨的事物來形容，譬如日本人就用「濱之真砂」（譯案：似中文「恆河沙數」之意）來表示。同理，對生活於深山林內的台灣原住民而言，就用「像樹上的葉子那樣多」來形容很多很多。

布農族

台灣中央山脈的中心是玉山，在其北東兩面的支翼中居住著布農族。此族有數詞從一至一萬，最高的固定數詞到百為止，並且一千及一萬這兩個數詞，都有合成語的現象。而對於十這個數詞，有時常在語尾添加助詞「An」來表示某種作用，例如表示「十個蛋」的時候，就常稱為 Massa'an（十）Vurun（蛋）。至於千和萬這兩個數詞為何有合成語的現象呢？那就是在百這個數詞加上形容詞來合成。一千就是 Siava（百）Raingaz（大）。而一萬就是 Mokana（較多）Siava（百）Raingaz（大）。

表示十以上的數語，是根據重數法。共有兩種稱呼的方法：一種是直接由兩個數詞合成，例如二十為 Rusa（二）Massa'an（十）。第二種是在兩個數詞間加入一個助詞，例如十一為 Massa'an（十）Kan（加）Tasia（一）。

綜合說明：以上的數語應亦根源於馬來語系。

雖然數的觀念如此發達，但實際的操作卻還是普通的計數法，從一到十反覆的計算。每計算一回十，便運用繩結或石塊木片等記識，如果繩結五個而餘數為五時，就計算為五十五。在抽象的計數方面，主要是利用左右的手指，有時也會用到左右的腳趾。先從左手的拇指開始，依序數至小指，即從一到五的數，然後換右手如法計數，是六到十。腳趾也是按照同樣的順序。在布農語系中，手、拳和五有相同的語根。

附帶在計數法一提的，是度量衡思想發展的程度。就尺度的觀念而言，因為和中國人交換布匹等緣故，使用了三種標準，即指極尺、半指極尺、手指尺。但是量的觀念就幾乎缺乏，只到初步階段。煮飯的時候，用一種藤製的圓籬，按照人數多寡的比率，裝盛定量的米粟。而出現衡的痕跡是在和中國人交換物品時，用手比較物品的輕重。數目的記載不十分發達，繩結是表示法之一。

另外，在交換所與中國人交換物品時，會使用一種符號記數法。那就是，準備好長約七、八寸的小竹片，每當原住民帶來物品，就記載下代表該物品數量價格的符號。例如，帶來一頭鹿就記為五個圓，三個圓代表一隻豬。而如果帶來是鹿皮時，就按照大小，每張用三條至六條的橫線表示。經累積計算後，有固定的交換物品額。這種情形，和經濟學上所謂的固定貨物交換比例有些類似。

曹族

在台灣中央西部的山地，就是玉山的西方支翼阿里山中居住著曹族。此族有數詞從一至一萬（部分族人至千），最高的固定數詞到千（部分族人到百）為止，而萬（部分族人為千）乃係合成語。固定數詞為一到十，以及二十、三十、...九十，百和千等二十個。在這些數語中，從三十，四十到九十等七個數詞，是現用的固定語，但有合成語的性質。讓我們從語詞的組織來看：Tommun 這個詞是表示單位數的十倍（ $ax10$ ），例如：80 為 Tommun'Voruhe，另外一萬為 Masske（十）Posipou（千），一千為 Masske（十）

Siere (百)。在十以上的數語表示方面，是根據重數法。就是在數詞間加入一種助詞，例如十一爲 Masske (十) iyao (加) tsune (一)。

綜合說明：曹族的數語應亦根源於馬來語系。

雖然數的觀念如此發達，但實際上普通的計數法爲從一到十反覆的計算，如果進行三次，就稱爲三十。另外在抽象的計算方面，則是先從一隻手的拇指開始，依序數至小指，即從一到五的數，然後換另一隻手如法計數，是六到十。在曹族語系中，手稱爲 Rimo-tsu,而五是 Rimo,在其後添加的 tsu 或許就是 tsune (一)的省略。因爲手有五個手指，所以有「五的一回計算」的意思。另外附帶在計數法一提的是，度量衡思想發展的程度。因爲自古就和中國人往來交換布匹，所以尺度的觀念相當進步。其使用了兩種標準，即指極尺、手指尺(拇指和中指的距離)。但因有累算的觀念，故在其基準下添加數詞。所以在指極尺中就有 1 指極、2 指極……10 指極等特殊的稱呼。手指尺亦然。

但是量衡的觀念就幾乎沒有，量的知識只到初步階段。煮飯的時候，用一種藤製的圓籬，按照人數多寡的比率，裝盛定量的米粟而已。而出現衡的痕跡，不過是在和中國人交換物品時，用手比較物品的輕重而已。數目的記載雖然不十分發達，繩結是表示法之一。

另外，還有一種計算出納的情況。曹族有把房子的一部分劃分爲貯穀所之風氣，由於迷信，貯穀所的窗戶平時都是緊閉的，不得隨便開啓。而窗外有數條截短的茅草細莖，莖的末端有的打結，有的沒有。茅莖的總數就是貯穀所內部儲存的粟穗束數。收成之初，先在細莖的下方打結，每當取出一束粟穗就割去一條細莖的結節，這樣，由茅草的數目，我們既可知道儲存了多少的糧食；看看尾端剩下的結數，我們也可計算現存的束數和消耗量了(既不至於違背迷信，又不至於無故亂開窗戶)。

魯凱族和排灣族

在台灣的南部居住著魯凱族和排灣族。因爲血源相近，固有語言也很一致，爲方便起見，我們放於同一節說明。這兩族有數詞從一至一萬，最高的固定數詞到千爲止。萬這個數詞爲合成語。固定數詞爲一到十，以及百和千等十二個。在十以上的數語表示方面，都是根據重數法。共有兩種稱呼的方法：一種是直接由兩個數詞合成，例如魯凱族的二十爲 Rusa (二) Puro (十)，排灣族的一萬爲 Ta-Purok (一十) Kuzuren (千)；第二種是在兩個數詞間加入一個助詞，例如魯凱族的十一爲 Ta-Puro (一十) Kato (加) Ita (一)，排灣族的二十一爲 Rusa-Purok (二十) Uzaya (加) Ita (一)。

綜合說明：魯凱族和排灣族的數語應亦根源於馬來語系。

在抽象的計數上，主要是先從一隻手的小指開始，依序數至拇指，即從一到五的數，先伸展手指，依序彎曲，然後換另一隻手如法計數，是六到十。在魯凱和排灣的語系中，五是 Rimo,也有手的意思。

就度量衡的發展而言，兩族皆受到中國人的影響，特別是排灣族中居住在極南丘野中的 Parizarizao 部族，有進步的經濟概念，開始使用含有中國風味複雜的度量衡。然而，往時兩族和中國人交換布匹時，僅採用了三種標準而已，即指極尺、半指極尺及手指尺。附帶一提的是，排灣族中的 Parizarizao 部族，因爲自古就與中國人往來，所以熟知貨幣使用，也明白如何計算；而且對於錢的單位，也有相對於漢人「一厘、一錢、十錢(一角)、一圓」等特殊的稱呼。

在數目的記載方面，算日的知識仍嫌不足的部族，則有繩結表示法。另外，在魯凱族，曾出現人口的計算。這是因爲清光緒元年(1875)，中國政府爲了開山撫助原住民，派遣了原住民的壯丁屯兵開墾，並給與俸祿。這樣一來，酋長就必須記憶部下的個數。於是便把與人數相同的草莖捆成一束，隨著人員的損益予以增減，作爲記籍的代用。至於數與迷信的關係，Parizarizao 部族中漢化程度高的人，日常生活常混有漢人的思想。本來漢人在婚姻完聘時，從男方送往女方家的聘物一定要偶數。排灣人餘沿襲此風，贈聘銀幣的時候，如果遇到一圓三圓五圓等奇數額時，就會再添中國的小錢一文，當作形式上的偶數來贈聘。

卑南族

在台東平野的南部居住著卑南族。此族有數詞從一至一萬，最高的固定數詞到千爲止。一萬這個數詞爲合成語。固定數詞爲一到十，以及二十，三十，…，九十，百和千等二十個。在這些數語中，從三

十，四十到九十等七個數詞，是現用的固定語，但有合成語的性質，觀察其語詞組織，自然就可以明白。例如 Maka 這個詞有表示單位數的十倍的意思，像七十就是 Maka-pitu (7×10)，Maka-warō (8×10) 為八十，九十就是 Maka-iwu (9×10)，至於一萬這個數詞就是由累加十回的千的意思所合成。10000……Mokktop (十) Korul (千)。

卑南族數的分類是從一到十為一界限，接著是十一到二十，但十一到十九屬於最高數二十的分子數；二十一到二十九屬於三十的分子數；以此類推，九十一到九十九屬於百位數的分子數。然後按照數界進行計算。大體上有兩種方式：第一種是十一到十九的計數，即加上一種助詞，例如十二為 Mokktop (十) Misama-ra (剩) Rua (二)。第二種就是二十一到二十九的計數，以及以上各數界的計數。請看下面的例子：

二十一就是 Makapta'an (二十) -mikamaka'tatorun-ra-Sasaya (一) 三十一就是 Makatorun (三十) -mikamaka'paputul-ra-Sasaya (一)

……

九十一就是 Makaiwa (九十) -mikamaka'sararuman-ra-Sasaya (一)

綜合說明：卑南族的數語應亦根源於馬來語系。

在抽象的計數上，則是先從一隻手的拇指開始，依序數至小指，即從一到五的數，先伸展手指，依序彎曲。在卑南族的語系中，五是 Rima, 也有手的意思。

就度量衡的發展而言，由於受到中國人的影響，和漢人買賣之際，有「一尺、五寸、一丈」和「一合、一升、一斗」等單位。另外在尺度上也有指極尺、半指極尺及手指尺三種基準。

在數目的記載方面也有繩結表示法和物品交換的計數。附帶一提的是，因自古就與中國人往來，所以熟知貨幣使用，也明白如何計算；而且對於貨幣的種類，也有方孔小錢（相當於厘）、小銀幣（相當於角）、大銀幣（相當於圓）等稱呼，另外還有銅幣（相當於錢）。也知道方孔小錢十個和銅幣一個等價。

阿美族

在台東平野的南部、中部和北部居住著阿美族。此族有數詞從一至一萬，固定數詞為一到十，以及百和千。一萬這個數詞為合成語。另外在十的前面添加 Ma 也有表示複數的意思。阿美族把數區分為不同的界限，一到十為基數；十一到十九屬於在二十位數的分子數；二十一到二十九屬於在三十位數的分子數；以此類推，九十一到九十九屬於在百位數的分子數。然後按照數界進行計數。大體上有兩種方式：第一種是像二十或一萬的合成形式，二十為 Tusa (二) Puro (十)，一萬為 Ma-puro (十) Vot (千)；第二種就是二十，三十甚至到一百重位數界限內的分子數。要表示這些數就是先有一個固定數語，然後在固定數語後加上分子數的單位。固定數語可分為二十位數 Savao, 三十至九十位數 Sika, 百位數 Sika-Makatap。請看下面的例子：十一就是 Savao-Tsatsai (一)，表示「二十位數界內的一」。而二十一就是 Sika'toro (二) -Tsatsai，表示「三十位數界內的一」。

綜合說明：阿美族的數語應亦根源於馬來語系。

在抽象的計數上，則是先彎曲小指，依序彎曲至拇指，這是一到五的數，然後再從拇指開始伸展，依次至小指，表示到十。另外也利用木竹片、小石塊等來幫助計算。

就度量衡的發展而言，因受到中國人的影響，和漢人買賣之際，也沿用中國的稱呼。另外在尺度上也有指極尺、半指極尺及手指尺三種基準。

就數目的記載方面也有繩結表示法。附帶一提的是，同族中的一部，因為與中國人往來，不但熟知貨幣使用，也明白如何計算；而且對於貨幣的種類，也有方孔小錢（相當於厘）、銅幣（相當於錢）小銀幣（相當於角）、大銀幣（相當於圓）等稱呼。也知道方孔小錢十個和銅幣一個等價。

平埔族

為了方便起見，我們把台灣的平埔族分為：保存原狀的平埔族和漢化的平埔族來敘述。

保存原狀的平埔族

居住在北西部山中的一群，稱為賽夏族。此部族有數詞從一至一萬，最高固定語至百為止。千和萬這兩個數詞，為合成語。固定數詞為一到十，以及二十，三十，…，九十到百等十九個。在這些數語中，七、八和三十，四十，五十，六十，七十，八十，九十等九個數詞，是現存的固定語，但有合成語的性質。讓我們從語詞的組織來看：七有六加一的意思，八是四的前面加上 Maika，有複數（ 4×2 ）的意思。而三十，四十，…到九十這些數語都在前面加上 Mon，表示單位數的十倍（ $a \times 10$ ）。以上的數語應亦根源於馬來語系。另外在十以上的數語表示方面，是根據重數法。請看下面的例子：十一為 Ranpon（十）Ahha（一），一千為 Ranpon（十）Kavahol（百）。但是表示萬時就比較特別，其為 Kavahol（百）Ranpon（十），就是（ 10×100 ）的意思。

漢化的平埔族

我們可由居住處區分為十部族，但只有帕塞黑族和克瓦朗族能保有本族的固有語，其他諸族完全失去固定語。漢化的平埔族由於受到漢民族的影響，數的觀念相當進步。

現在讓我們介紹帕塞黑族和克瓦朗族。

一、帕塞黑族：此部族有數詞從一至一萬，最高固定語至千為止。萬這個數詞為合成語。固定數為一到十，以及百和千等十二個。在這些數語中，六、七、八、九四個數詞，是現存的固定語，但有合成語的性質。讓我們從語詞的組織來看：六是五加一的意思， $6 = \text{Hasuv'za} = \text{Hasuv-iza} (5 + 1)$ ；同理，七有五加二的意思，八是五加三，而九是五加四。在十以上的數語表示方面，是根據重數法。例如十一就有十加一之意。

二、克瓦朗族：此部族有數詞從一至十萬，最高固定語至千為止。萬、十萬這兩個數詞為合成語。固定數為一到十，以及百和千等十二個。在十以上的數語表示方面，也是根據重數法。但有兩種稱呼的方法，一種是如二十、萬和十萬，是直接由兩個數詞合成，表示沒有單位的數，例如：二十為 Rusa（二）Haptin（十），一萬為 Haptin（十）Rararan（千），十萬為 Hasivu（百）Rararan（千）。

第二種是在兩個數詞間加入一個助詞，表示有單位的數，例如十一為 Haptin（十）Keyano（剩）Risi（一）。

後記：筆者末學後進，不揣淺陋地節譯這篇文章，主要是希望能拋磚引玉，讓民族數學的研究與原住民文化得到應有的重視與關懷。本文之得以完成，要感謝師大數學系洪萬生老師提供相當寶貴的資料（該文由許進發學長訪得），以及師大物理系蘇賢錫老師在日文上所給予的指導。在此向兩位老師致上最高的謝意。

參考資料

1. 伊能嘉矩 〈台灣土蕃の數の觀念〉《東京人類學會雜誌》

第二百四十三號 明治三十九年六月二十日發行；

第二百四十五號 明治三十九年八月二十日發行；

第二百四十七號 明治三十九年十月二十日發行；

第二百五十號 明治四十年一月二十日發行；

第二百五十五號 明治四十年六月二十日發行；

第二百五十七號 明治四十年八月二十日發行；

第二百五十八號 明治四十年九月二十日發行

2. Borba'Marcelo C., Feb. 1990, "Ethnomathematics and education", For the Learning Mathematics, 10 (1), FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada.

3. D'ambrosio'Ubiratan and Gerdes'Paulus, "Ethnomathematics, ethnoscience and the recovery of world history of science",收入 J. Dhombres, M. Hormigon & E. Ausejo eds., Symposia Survey Papers-Plenary Lectures of the XIXth International Congress of History of Science (Zaragoza, August 22-29, 1993).

蘇意雯就讀於台灣師範大學數學研究所

