# 《畢氏定理四千年》譯序

洪萬生

相對於羅密士（**Elisha Scott Loomis**）的《畢氏命題》（***The Pythagorean Proposition***，初版於 **1927** 年）的 **371** 個證明，八十年後問世的這本《畢氏定理四千年》（**2007** 年）究竟有什麼賣點呢？當作者毛爾自以為發現一個巧妙的新證法，最終還是難逃羅密士所佈下的 **371** 天羅地網，尤其不無「狗尾續貂」之嫌。因此，從激發讀者的好奇心來考量，這種「炒冷飯」的無聊之舉，看來根本不值得我們推薦，更何況在網路上，我們還可以輕易地搜尋並儲存《畢氏命題》的免費電子版。

不過，這本《畢氏定理四千年》還是值得大力推薦。我的理由主要有兩分面。首先，毛爾這位數學家兼科普作家對於數學知識活動的體會，相當通情達理，因此，讓他來「重述」這個主題的故事，調性婉約體貼，足以打動人心。其次，毛爾在本書中，將這個主題的敘事放在數學史的脈絡中，讀者因而得以認識畢氏定理與數學發展的密切關係，從而在數學知識活動上，凸顯「舊詞新說」與數學真理歷久彌新的特殊意義。

現在，讓我們回到上引毛爾那個非常巧妙的證法。在本書「補充欄 **4**」中，作者以「折疊的袋子」證法名之。其中，我們看到毛爾的現身說法，透露他「再發現」此一證法的無上「法喜」，儘管它仍逃不過羅密士鉅細靡遺的蒐集彙編。根據《畢氏命題》的記錄（編號 **230**），那是早在 **1934** 年，就已經由一位十九歲的年輕人所發現。事實上，這個證法充滿了數學洞識，它不僅連結了「面積證法」與「比例證法」，是「圖說一體，不證自明」（**proof without words**）的最佳例證之一，另一方面，此一方法正如毛爾所指出：「只要證明畢氏定理在這個特別的多邊形（按：本例為三角形）上能夠成立就可以了。」

面積證法與比例證法是《幾何原本》中，歐幾里得為畢氏定理所提供的兩種證法。所謂的面積證法，是指《幾何原本》第 **I** 冊第 **47** 命題的證法，它主要依賴三角形（面積）全等（**SAS**）的概念，來證明：在一個直角三角形中，直角的對邊上的正方形（面積），等於包含直角的兩邊上的正方形（面積）之和。另一方面，比例證法是指《幾何原本》第 **VI** 冊第 **31** 命題：直角對邊上的圖形（**figure**），等於包含直角的兩邊上之相似及相似地被描述的圖形（**similar and similarly described figures**）。根據毛爾的說明，「這幾乎是命題 **I.47** 的逐字重複，除了『正方形』被『（相似）圖形』所取代。」此處，「被描述的圖形」可以是任意彼此相似的圖形，它們甚至不必是多邊形。因此，命題 **VI. 31** 顯然是命題 **I. 47** 的延拓，歐幾里得之所以將前者安排在第 **VI** 冊，是因為《幾何原本》直到該冊才討論相

似形。而這當然，更是由於比例式理論（**theory of proportion**）安排在第 **V** 冊的緣故。事實上，《幾何原本》前四冊主題是平面幾何學，也是我們目前國中幾何教材的最原始出處。

除了這兩種方法之外，畢氏定理的主要證法還有所謂的「弦圖證法」。這個方法源自中國與印度。無論是哪一個版本，應該都是利用圖形的切、割、移、補 － 在中國第三世紀被魏晉數學家劉徽稱之為「出入相補」，出自他對漢代數學經典《九章算術》的「勾股術」之註解。不過，現代人（尤其是數學教科書的編輯）都喜歡將它「翻譯」成代數式子的操弄（二項式展開），從而減損了它固有樸拙的「美術勞作」風格，實在有一點可惜，因為如果國中學生無法嫻熟操作二項展開式，那麼，此一證法的理解就備受考驗。無論如何，「出入相補」這個方法訴諸直觀的「動手做」，在不必講求邏輯嚴密論證的文化脈絡（譬如中國與印度）中，顯然相當受到歡迎。事實上，在初等教育階段，它也是非常值得引進課堂的一個經典案例，可以操練所謂的「探究」（**investigation**）教學是怎麼回事。另一方面，如果我們願意「勻出」一點寶貴時間，試著比較這三個證法在方法論（**methodology**）層面的異同，乃至於認識論（**epistemology**）層面的意義，那麼，關注數學知識活動的多元價值，或許可以多少成為國民素養的一部份了。

上述這個比較的案例，不必侷限在初等教育層次，高中或大學教師其實也可據以探討數學發現與證明的意義。還有，對一般讀者來說，利用這個案例重溫學習數學的經驗（不管「甜美」或「苦澀」，或甚至「不知從何說起」），在一個科技主導世界、而數學又大大主導科技的世代中，或許可以變得比較舒適自在。這種從數學史取材融入數學教學，而企圖讓數學知識活動變得更有意義的進路，是 **HPM** 的主要關懷之一。

所謂 **HPM**，是指數學史融入數學教學的一種教育研究與實踐。它原來代表國際數學教育委員會（**ICMI**）的一個最早成立的研究群：**International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics**，後來也指涉此一研究群針對數學教育的共同關懷。毛爾的數學普及書寫雖然並未刻意呼應這種關懷，然而，就如同許多其他科普著作一樣，《畢氏定理四千年》在歷史文化脈絡中，說明相關的數學知識活動之意義，因此，本書當然也可以算是 **HPM** 方面的參考著作。

如此歸類當然需要一個先決條件，那就是：本書是採取數學史進路，論述以畢氏定理為專題的一部（科普）著作。事實上，作者在本書中，的確大致按照數學的發展歷程，來敘述與畢氏定理有關的數學與數學家的故事。譬如說吧，從畢氏到歐幾里得與阿基米德，是有關希臘數學史的部分。在公元後 **500-1500** 年間，作者則是以中世紀歐洲，以及印度與阿拉伯數學史為主題。至於進入微積分主導

的近代數學時期，作者先引進創立代數符號法則的韋達，因為他將「三角學從原本侷限在解三角形的一門學問，轉變成為與分析學有關的學門」。至於作者何以獨厚韋達？那是由於畢氏定理在三角學中扮演了核心角色。在微積分的相關敘事中，作者主要指出微分版的畢氏定理如何應用以求曲線之弧長，「畢達哥拉斯一定很難想像，他的定理被用於求幾乎所有曲線之長度」，其中必須藉助於無限的概念，而這卻曾經深深困擾著古希臘人。

在簡短敘述的微積分發明故事之後，作者開始採取「專題」的方式，來說明畢氏定理在各相關領域的現身之意義：畢氏定理與射影幾何學中的線座標、畢氏定理與內積空間乃至於希爾伯特空間、畢氏定理與黎曼幾何、畢氏定理與相對論，等等。在這些敘事中，有一些很少被一般的科普作品所引述，譬如愛因斯坦的十二歲回憶：「**在我拿到這本神聖的幾何學小冊之前，伯父就告訴過我畢氏定理。經過一番努力後，我在相似三角形的基礎上成功地『證明』了這個定理。對我來說，像直角三角形邊長的比例關係，由其中一個銳角完全決定是『顯然』的，在類似的情況下，只有我認為不那麼『顯然』的才需要證明。**」顯然，愛因斯坦「再發現」了比例證法，這清楚說明畢氏定理以及包括它的《幾何原本》，一直在數學學習上扮演了重要的啟蒙角色。

因此，本書不僅適合中小學師生閱讀，對於一般讀者來說，它也是可用以充實國民素養的數學普及讀物。事實上，筆者所以主譯本書並高度推薦，不僅是毛爾的普及數學著作在台灣頗受歡迎，更值得注意的，是他的一貫寫作風格，都是企圖在文化史的脈絡中，讓數學知識活動變得更加立體起來，換句話說，他對歷史上的數學現象之「快照」，因為有了文化脈絡的襯托，譬如本書「補充欄 **2**：藝術、詩歌及散文中的畢氏定理」，而發揮了 **3-D** 再現的效果。另一方面，作者也「不惜」將自己推入歷史敘事現場，讓本書洋溢著毛爾獨特的「個人風格」，譬如他不僅自評他自己「再發明」的證法，還在本書最後一章〈終曲〉中，簡述他們夫婦在 **2005** 年 **2** 月地中海暴風季節，前往畢達哥拉斯家鄉沙摩斯島旅遊的經歷。最後，當他的回程飛機繞過島上最高峰克基斯山時，他想起漁夫沿著陡峭的山壁航行時，都仰賴了畢達哥拉斯的靈魂所點燃的一道光，在「暴風裡，它就如同燈塔般地指引了安全的方向。」這是本書的結語，也是最佳的自我推薦！

**2014/11/25** 附記：

本書英文版是毛爾（**Eli Moar**）所著的 ***The Pythagorean Theorem: A 4000-Year History***，中譯本由黃俊瑋、蘇俊鴻、林炎全與我合作，三民書局即將出版。又，林炎全老師曾經寫過本書的書評，請參看數學博物館 • 科普特區 • 深度書評。