

比喻與數學的敘事理解

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

一、引言

所謂數學敘事 (mathematical narrative)，是指用以溝通或建構數學意義的一種敘事 (narrative)。在本文中，所謂的「數學的敘事理解」，是指藉由比喻 (metaphor) 的引進，數學與敘事的結合所引發或促進的數學理解。因此，如果我們打算將這一類工具引入教學現場，那麼，實施的對象或時機就要稍加考量。比如說，在制式的 (conventional) 學校教學中，這一類的工具比較適用於學生學過正規的教學內容之後，教師打算鼓勵學生進行更深層次的反思，或者為正規評量弱勢的學生尋求補救的機會。另外，在大學的數學通識課程中，也非常適合用來進行學習評量。

在本文中，我打算介紹一個有關數學敘事的教學評量工具 - 一份問卷，它通常被我使用在台大數學通識課程 -- 「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」之中，作為第二週的課後作業。由於這一門課程的教學目標，是藉由數學小說 (mathematical fiction) 的閱讀來學習數學，因此，數學 (敘事) 素養的提升，當然是主要的教學關懷。

至於為何引進此一工具呢？在一方面，由於該課程的教學策略，是鼓勵學生進入 (指定閱讀的) 數學小說的故事情節中，挖掘它們所連結的數學知識活動，以便體會數學多元面向的價值與意義。另一方面，此一工具所涉及的圓冪定理，是國中數學課程的幾何核心內容，一般學生都應該曾經十分熟悉才是，還有，我們所設計的提問也呼應了這一門課的規劃初衷。根據我的課程大綱，這一門課程是希望藉由數學與敘事的結合，引導學生：

- 認識數學思維的本質，以及它的可親近性 (accessibility)。
- 從數學小說 (與電影) 中，探討數學概念或方法如何被呈現。
- 探討數學概念成為文化 (或文學創作) 的隱喻 (metaphor) 時，數學與文化彼此的相互影響。

因此，針對已有的數學知識 -- 譬如圓冪定理的證明 -- 之反思 (reflection) 能力，是這一門課程對於學習成就的期許。

二、學習評量工具

現在，請參考我的工具 (問卷) 如下：

主題：數學的文學比喻

*繳交日期：

姓名：

系級與學號：

同組同學：

· 回想國中數學，試證明下列定理：

給定圓內一點 P ，通過 P 點任意畫一條弦 AB ，則 $PA \times PB$ 為常數或定值。

If through a point P inside a circle a chord AB is drawn, the product

$PA \times PB$ is constant.

提示：通過 P 點另作任意一條弦 CD ，證明 $PA \times PB = PC \times PD$ 。

1. 針對這個定理，毛爾在他的《畢氏定理四千年》評論說：

“[Again] we have perfect democracy: every chord has the same status in relation to P as any other.”(這真是又一次地完美的民主體現：對 P 點來說，每條弦全然平等，不分孰高孰低。)

請問：這一比喻 (metaphor) 與此一定理的內容 (content) 有何關係？試簡要說明之。

2. 此一定理的證明過程如何有助於你對於他的比喻之理解？試簡要說明之。

3. 反過來，他的比喻對於此一定理的證明與意義是否有所幫助？試說明之。

4. 你在過去的 (數學) 學習經驗中，是否曾經遭遇過類似的問題？如有，是哪一類的學習情境 (譬如學校上課)？請說明之。

相對來說，在上述四個提問中，第 1 題有比較自由的發揮空間，儘管我所附的提示應該有助於學生的說明。事實上，這個提示意在指出數學 (方法) 的確實掌握，才能更加深刻理解相關的 (文學) 比喻，因此，我設計了第 2 個提問。至於第 3 個，則是反過來考察 (恰當的) 比喻是否增進我們對數學知識的理解程度。至於第 4 個提問，則是希望掌握學生過去的數學經驗，以便可以幫助我們詮釋學生作業時的參考。

在 2014 年 7 月，我曾為教學碩士班的在職進修國、高中數學教師 (任教年資至少五年)，講授六堂數學史課程。第一次上課的第一節課一開始，我即邀請他們填寫此一問卷的第 1、2 題，其中，第 1 題的英文句子未附中文翻譯。在十五份回收問卷中，有十三份的回答都能切中要點，其餘兩份則未曾對比喻進行深入的討論。無論如何，這份問卷對數學經驗相當豐富的數學教師來說，具有可靠的「專家效度」，換句話說，這是一份合理的數學問卷。我們且參看其中一位老師的回答：

1. 每一條通過 P 的弦都有相同的情況，就好像定理的內容中提到的 $PA \times PB$ 為定值。將之比喻為完美的民主，可視每一條弦為每一個人民，在同一個國家內都有相同的地位、權利。
2. 在證明的過程中，除了 AB 這條弦之外，我們有又另做了一條弦 CD ，利用證明這兩條弦和 P 之間會有 $PA \times PB = PC \times PD$ 的關係，推得此定理。在證明過程中這兩條弦都是任意畫出的，表示每一條通過 P 的弦都會有相同的關係，呼應了這個比喻。

三、學生的回饋

2014 年秋季班，我在台大的通識課程「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」中，要求學生回答此一問卷當成家庭作業。在回收的 32 份（有些同組學生共寫一份）作業中，我引述其中三份，其中一份是由兩位大一學生（同組）所提交。當然，這三份問卷的填寫者都提供了該定理的證明。她們的回答依序如下：

1. 我們認為圓就像是一個完美民主框架下的政體（國家）， P 點就像是其中的人民（People），而無數的弦就可視為林林總總的政見，通過人民的同意後（弦通過 P 點），都能產生相同的結果（ $PA \times PB = \text{定值}$ ），也就是完美的民主（圓）。
2. 證明過程讓我明白 P 點與任意弦所構成的關係是相同的結果，都可以是 $PA \times PB$ 成為一個固定的值，透過它可以對毛爾的比喻有些初步的概念。
3. 毛爾用與我們切身相關的事物，也就是現在大多數人追求的民主，來對這個定理作比喻；用我們普遍的價值信仰來闡述這個存在於世上很久的道理，賦予了它實質上的意義。而這也是數學小說的表現手法之一，用一個淺顯易懂、平易近人的比喻，來套入數學的知識，使閱讀的人能夠更加清楚當中運用的數學，進而了解作者想闡述的意思。簡而言之就是，與其直接介紹這是哪一個數學定理，不如用貼近生活的比擬，來幫助讀者記憶和接納。
4. （從略）。

在上引這兩位學生的第 4 題的回答中，談到她們高中學習河內塔的經驗。當年，她們（高中不同校）之中的一位數學老師引進有關河內塔問題的傳說，讓她們留下了難忘的印象。緊接著，讓我們請參看一位大三學生的回答如下：

- 1 這句話特別突顯了民主中的平等價值（“democracy”... “the same status”）和定理中圓上其他點和 P 的關係巧妙相關。不論是哪條弦，以 P 為分界的兩段相乘必定和另一條弦的那兩段相乘一樣。簡言之，不論線段是長或短或屬於哪條弦上，最後相乘比較都是「相等」的，正如毛爾所言的平等。

既然相乘後都是一樣的，你是哪條弦，又是長或短已不再重要。此不變定理也呼應了毛爾所說的「完美的民主」(perfect democracy) 如此的理想而不變。

- 2 證明「相似」的過程也呼應了所言的「完美的民主」(perfect democracy)：首先因為對應了相同的弦，角度自然也相同。雖然有些扇形貌似相當大，有些非常小，形狀懸殊甚大，但它們對應的弦及角度根本是相等(同)的。此呼應了平等概念，並更幫助我理解“in relation to P”的意義。通過 P 點的各個三角形的角(角度)其實都在“the same status”。
- 3 是的。他的比喻對此證明當然有意義，也讓我對此定理有了更深的體悟。一開始他所說的“the same status in relation to P”令我一頭霧水，但當我根據此言繼續思考，我開始拼湊出此定理最核心的元素：P、弦、相等。比喻中所提到的概念比較不那麼抽象，給與我們連結的機會。因為比喻，我很順理成章地朝向對的證明方向走去，所以比喻確實對證明和意義幫助甚大。
4. 在過去數學學習過程中，我確實碰過此證明問題。但是當初老師並沒有輔佐類似的比喻或補充來幫助學生學習，而是生硬地用很「科學」(hard)的方式證明出來，但意義僅停留在定理的呈現上。有了比喻，不僅學生對定理會更加熟稔，也會有多一層人文的洗鍊，同時對定理和平等都有了更具體的概念，並能互相呼應和對照。人文的比喻詮釋和邏輯為重的數學定理不是互斥，而能互相兼容，也讓學生的概念清楚、全面，而更有深度。定理將不再只是定理。

讓我們請最後參看一位大四學生的回答：

1. 毛爾的比喻大致是意思是：「我們擁有完美的民主，這個完美的民主即是：每一條弦對於 P 點來說都擁有相同的地位。」而民主的重要內涵為平等，也就是說，每條弦對 P 是平等、相當的。由這點可以推知 $PA \times PB = PC \times PD$ 會成立，因為通過 P 點的任一兩條弦 AB 及 CD，其到 P 點的距離相乘恆為一定數。
2. 證明的過程中，因為畫出了圖形，所以更加清楚的理解何謂「玩(按：應為「完」之誤)美的民主」。提示中有說明：通過 P 點的每一條弦，都會符合 $PA \times PB = PC \times PD$ 的定理：每條弦到 P 點的距離相乘都會一樣，所以可以理解，毛爾所說的 perfect democracy 大概意指相等、平等。
3. 有，後面的那句“every chord has the same status in relationship to P as any other”給了證明時很好的思考方向，因為有這個提示，所以會多畫出其他的弦當輔助線，same status 也代表一個固定的地位(暗指一個定值)，說明等式會成立的關鍵。
4. 在過去學習數學的經驗中，只要跟幾何有關的題目好像都會碰到類似的

證明問題。例如：橢圓上任一點到兩焦點的距離和是定數、拋物線上任一點到焦點與準線等距。當時在學這些公式時，老師在課堂上也曾打趣說過這樣的定裡（按：當為「理」之誤）良好地彰顯了平等的價值，意外讓冷冰冰的算式多了點人文氣息。

四、結論

根據上文的討論，我們可以發現：數學知識的內容與方法，的確與相關命題的文學比喻息息相關。數學知識與文學比喻（*literary metaphor*）互相發明，這種數學敘事為學習或反思提供了一種另類的切入點，除了有助於教師 -- 譬如在大學通識課程或十二年國教的特色課程實施中 -- 確認一般學生的相關數學素養之外，也得以鼓勵制式學習評量相對弱勢、但卻喜歡編或說故事的學生（以大學文學院學生為例），為自己尋求適合學習的方式與節奏。無論如何，這種數學敘事是非常值得推薦與推廣的教學工具，因為對教師來說，它是一種教學工具（*teaching tool*），而對學生來說，它則是一種認知工具（*cognitive tool*）。

最後，有關本文所提及之教學/研究工具，我想附帶說明它的取材背景。事實上，正如問卷說明，其第 1 題引自毛爾的《畢氏定理四千年》。它的上下文脈絡如下：

所謂美，固然有其主觀性，然而一個定理或其證明如何才能被認為是美的呢？數學家自有他們的一套共識，一個至高無上的判準，那便是對稱性。譬如說吧，考慮三角形的三條高：它們永遠交於一點（正如中線和分角線一樣）。這個命題給了三角形某種優雅，伴隨著它的全幅對稱性：沒有一個邊或頂點比起其他更具有優先性；在這些構成元素之中，有一種完全的民主（*complete democracy*）。或者，考慮這個定理：如果過圓內一點 P ，畫出弦 AB ，那麼，乘積 $PA \cdot PB$ 為定值。這真是又一次完美的民主體現：對 P 點來說，每條弦全然平等，不分孰高孰低。

從這樣的比喻，我們可以發現：目前數學普及書寫中的敘事，已經不再只是歷史敘事（*historical narrative*）-- 譬如說說數學與數學家的故事 -- 而已，而是由於小說家的介入，出現了「數學小說」這種嶄新的文類（*genre*）。這種奠基於數學的文學比喻的書寫，想必對於數學家/數學普及作家帶來不小的啟發，於是，數學普及作品出現如上引毛爾的數學敘事，也就不足為奇了。因此，我建議凡是打算將數學敘事引進課堂教學的教師，積極地向數學普及書籍或數學小說學習，應該是一條極為可行的途徑。儘管這種進路不會也不應該完全取代制式課程，但是，在特色課程中採取這種教材與教學規劃，絕對是值得期許的嘗試。

參考文獻

毛爾 (2015). 《畢氏定理四千年》，台北：三民書局。

林芳玫、洪萬生 (2009). 〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉，
《科學教育學刊》第十七卷第六期, 531-549。

洪萬生 (2013). 台大開放式課程「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」：
<http://ocw.aca.ntu.edu.tw/ntu-ocw/index.php/ocw/cou/101S126>。

數學小說專欄，台灣數學博物館 <http://museum.math.ntnu.edu.tw/>

附記：本文初稿原刊教育部高中數學學科中心高中數學電子報第 99 期。轉載於此略有修訂。不過，我僅在目前版本的「結論」中，特別指出這種數學敘事同時是教學/評量與認知工具，前者針對數學教師，而後者則針對學生來說。