正七邊形的尺規作圖之不可能！

洪萬生
台灣師範大學數學系

從正三角形開始，正方形、正五邊形、正六邊形都可以尺規作圖（請參看本欄文章：〈從三角形到正方形〉和〈正 5、6、15 邊形之尺規作圖〉)。

本欄已刊李建勳〈反證正七邊形不可能尺規作圖〉，當然足以說明此一正多邊形的作圖之不可能。此處，我們再推薦一個更代數化的方法，證明此一不可能性！

考慮下列方程式

$$z^7 - 1 = 0$$

其中 $z = x + yi$。顯然它的七個根，恰好是複數平面上單位圓內正七邊形的七個頂點。由於

$$(z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^7 - 1 = 0,$$

因此，它的七根除了 $z = 1$ 之外，其它的六根都是下列方程式的根：

(1) $$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 。$$

現在，讓我們將 (1) 式等號兩邊同除以 z^3，則可得下式：

(2) $$z^3 + 1/z^3 + z^2 + 1/z^2 + z + 1/z + 1 = 0$$

再進一步作代數變換，又可以得到下式：

(3) $$(z + 1/z)^3 - 3(z + 1/z) + (z + 1/z)^2 - 2 + (z + 1/z) + 1 = 0$$

令 $y = z + 1/z$，則(3)式可以變換成爲下列方程式：

(4) $$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 。$$

另一方面，由於 z 是1的七次方根，所以，它可以表示爲下式：

$$z = \cos\phi + i\sin\phi，$$

其中 $\phi = 360^\circ/7$。另外，再由於 $1/z = \cos\phi - i\sin\phi$，因此 $y = z + 1/z = 2\cos\phi$。現在，如果我們可以針對 y（尺規）作圖，當然也可以針對 $\cos\phi$ 作圖，反之亦然！因此，如果我們可以證明 y 無法作圖，那麼，$\cos\phi$ 或 z 當然也無法作圖，於是，正七邊形的作圖就不可能了。

最後，如果我們可以證明上述方程式(4)沒有有理根，那麼，我們就大功告成了。現在，假設它有一個有理根，令爲 r/s（r, s 互質），則

$$r^3 + r^2 s - 2rs^2 - s^3 = 0$$

由此可知 r^3 有因數 s，s^3 有因數 r。但是，r, s 可能的公因數必須是 ± 1，因此，如果方程式(4)有一個有理根的話，那麼，它不是+1 就是-1。這兩個數都無法滿足方程式(4)，因此，方程式(4)沒有有理根，y 乃至於 z 當然就無法尺規作圖了。

附註：本文根據 Richard Courant and Herbert Robbins (Revised by Ian Stewart), *What Is Mathematics?* (New York / Oxford: Oxford University Press, 1996) pp.

138-139 改寫。