「摺摺」稱奇—從摺紙遊戲學習尺規作圖

陳宥良、譚克平、趙君培

國立臺灣師範大學科學教育研究所

緒論

一場你來我往、爭鋒相對的對戰遊戲總是令人再三回味，然而好的對手不易尋找，協調彼此的時間及地點更是一大難事，當興致來了卻無對手可以較勁，那股纏繞心頭的鬱悶之情久久無法散去，此時總是心想，如有單人遊戲該有多好！感謝希臘人，感謝他們創造出風靡二千多年的單人「遊戲」—尺規作圖。

感謝歐幾里得，隨著其不朽著作《幾何原本》中許多結論成為中學教材，中學生有幸接觸此經典「遊戲」，在此遊戲裡，直尺能畫直線，圓規能畫圓或弧，利用如此簡單工具卻能畫出無數精準的圖形，這是一種無以倫比的數學之美，但令人遺憾的是，如此「精簡」的功能似乎令不少學生適應不良，而中垂線、角平分線、…、平行線等基本作圖更形成一道道關卡，考驗著學生進入「遊戲」的決心。

該怎樣才能協助學生享受作圖「遊戲」的樂趣呢？可能答案就在你我的童年回憶中—摺紙！

回想孩童時，一張紙到了手裡，三兩下就能摺出一架紙飛機，在紙張摺疊過程中，一條摺痕即為一條對稱軸，一個角的兩邊重合即產生角平分線，孩童們正不自覺地重複應用對稱與平分概念。因此，若從學生熟悉的摺紙出發，僅需熟練數個基本動作，即可開始嘗試建構各種幾何圖形，於操作中觀察與思考，在作圖「遊戲」的樂趣中學習幾何。

利用摺紙「作圖」不僅容易上手，更令人驚喜的是，每一個摺紙動作均有對應的尺規作法，此意指學生面對尺規作圖問題時，可先嘗試利用摺紙方式解題，待摺紙「作圖」完成後，再逐一將摺紙動作「轉譯」為尺規作法，此作圖問題即可解決。

本文以下的部份將分成三個小節，首先介紹摺紙「作圖」的基本假設與 7 個摺紙動作，接著討論每一個摺紙動作所對應的尺規作圖方法，最後以一個實例說明學生如何藉由摺紙思考作圖問題，並經由「轉譯」摺紙動作為尺規作法完成作圖。

一、摺紙作圖的基本假設與動作

摺紙在人們眼中，是一種兒時回憶，是一種藝術創作，視其為幾何作圖的「工具」令人匪夷所思，然而只要有合理的假設與明確的動作定義，數學家已證明摺紙可以解決所有尺規作圖問題。眼尖的讀者

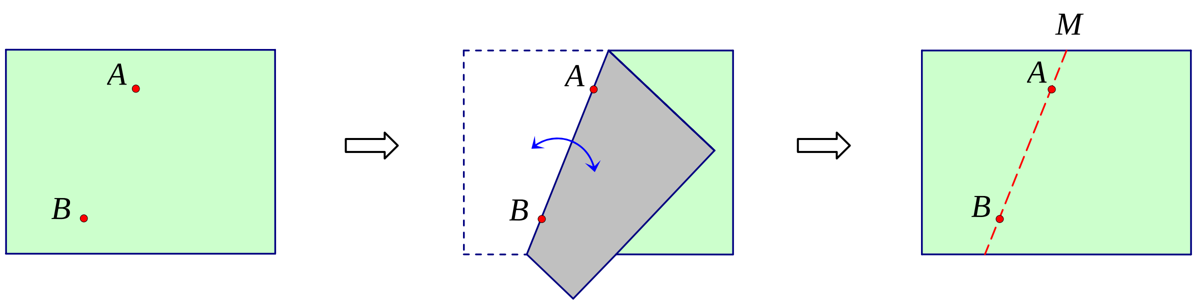
看到這兒，心中必定浮現一個大問號：該如何利用摺紙摺出一個圓呢？沒錯，摺紙所產生的摺痕多為線段或直線，確實無法如圓規一般畫出完美的圓，但細看所有作圖問題，本質上均為尋找所有交點的相對位置，當一個圓的圓心與圓上任一點位置確定，即可假想此圓已被作圖完成。如果我們能夠接受這樣的處理方式，摺紙的動作也就可以「摺」出一個圓了。綜合上述討論，本文將採用以下 4 個基本假設，做為摺紙作圖遊戲的起點：

1. 摺紙動作所產生的摺痕均視為直線，多邊形紙張的邊亦視為直線。
2. 任意兩條不平行直線相交處視為一個點。
3. 經紙張摺疊後可重合的兩線段或兩角均視為相等。
4. 當一個作圖問題中所有交點的相對位置均確定後，此作圖問題即視為作圖完成。

在摺紙動作方面，本文採用 7 種不同的摺紙動作，此 7 種動作有一共同特色，就是都與對稱這個基本幾何概念有關，每個動作均產生一條摺痕（直線），均牽涉到對稱的概念，重複使用這 7 個動作將可解決所有尺規作圖問題。7 個摺紙動作分別敘述如下：

摺紙動作 1.　摺出通過兩點的直線

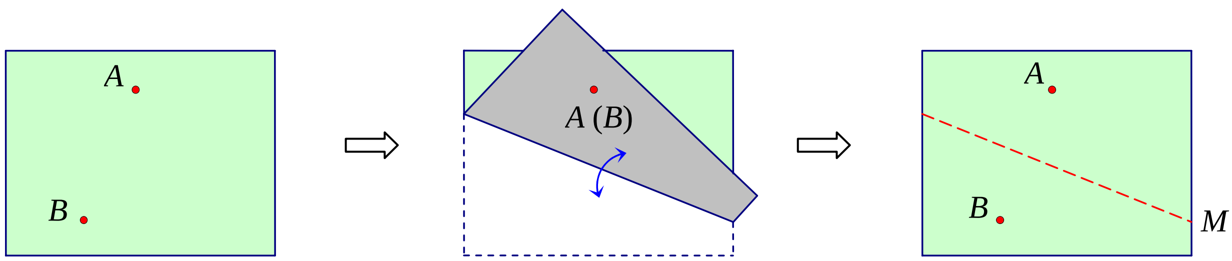
如圖一，紙上有 A、B 兩點，可摺出摺痕 M 線通過此兩點。



圖一

摺紙動作 2.　兩點重合

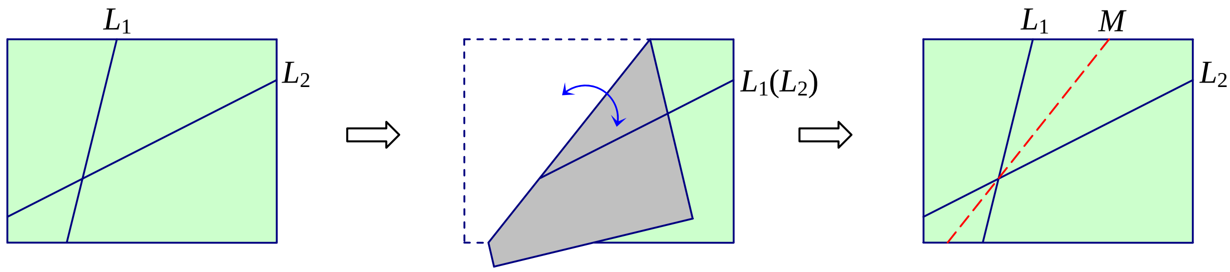
如圖二，紙上有 A、B 兩點，可摺疊紙張將 A 點與 B 點重合，此時所產生的摺痕 M 線為 A、B 兩點的對稱軸。根據基本假設 3，可簡單推論發現摺痕 M 線亦為 $\overline{AB}$ 的中垂線。



圖二.　符號 $A(B)$意指紙張摺疊時，A 點與 B 點重合。

摺紙動作 3.　兩線重合

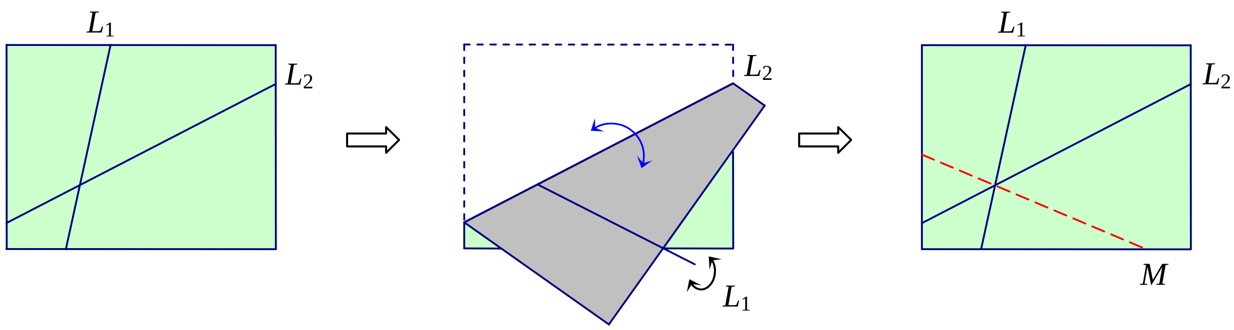
如圖三，紙上有 L_1 、 L_2 兩直線，可將 L_1 與 L_2 重合，此時所產生的摺痕 M 線爲 L_1 、 L_2 兩直線的對稱軸。根據基本假設 3，可簡單推論出摺痕 M 線爲 L_1 、 L_2 夾角的平分線。



圖三.　符號$L_1(L_2)$意指紙張摺疊時，直線L_1與L_2重合。

摺紙動作 4.　摺疊再摺疊

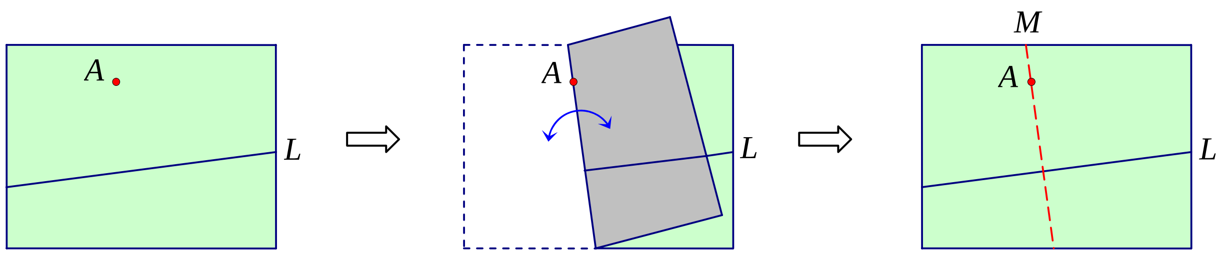
如圖四，紙上有 L_1 、 L_2 兩直線，先以 L_2 爲摺痕將紙摺疊，在未攤開紙張的情況下，摺出與 L_1 重合的摺痕M線。觀察右下圖可發現，當以L_2爲對稱軸時，L_1與摺痕M線爲對稱直線。



圖四.　7 個摺紙動作中，唯有此動作需摺疊兩次才能完成。

摺紙動作 5.　線外一點作垂線

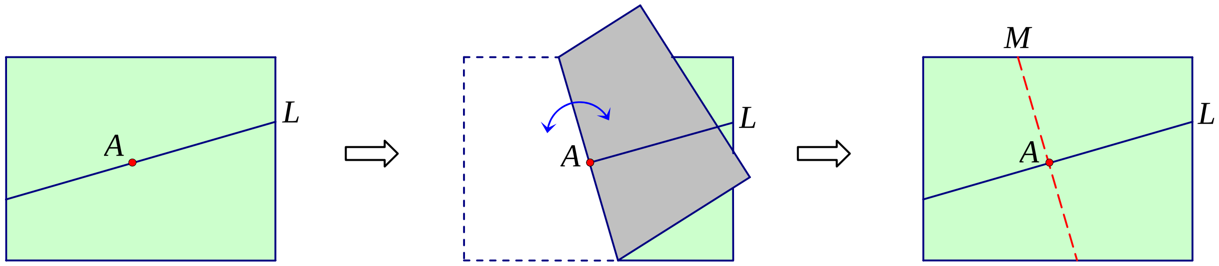
如圖五，紙上有一直線 L 與線外一點 A，可摺出通過 A 的摺痕 M 線，且 $M \perp L$ 。



圖五.

摺紙動作 6.　線上一點作垂線

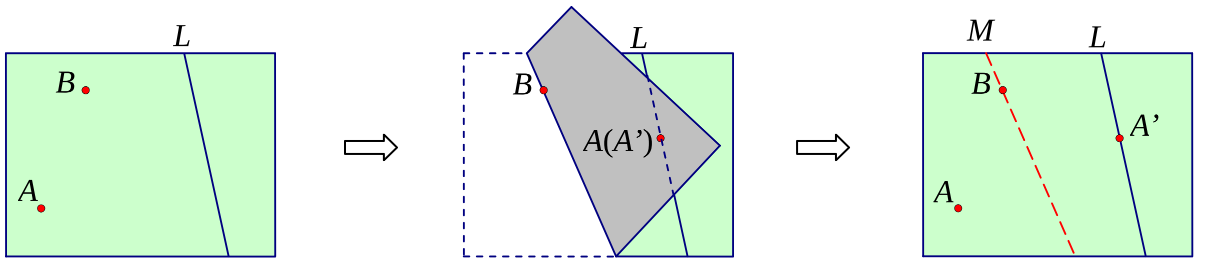
如圖六，紙上有一直線 L 與線上一點 A，可摺出通過 A 的摺痕 M 線，且 $M \perp L$ 。



圖六.

摺紙動作 7.　一點到一線，摺線過一點

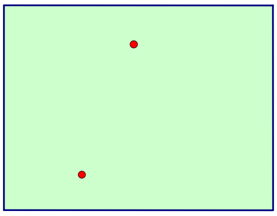
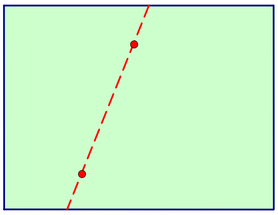
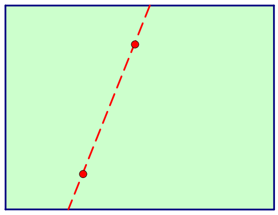
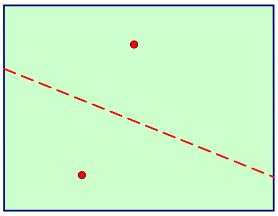
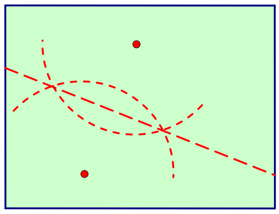
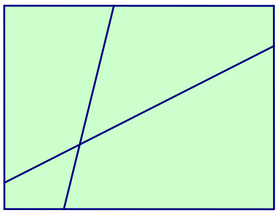
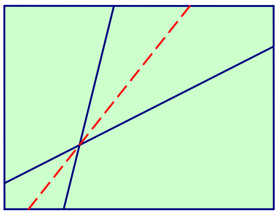
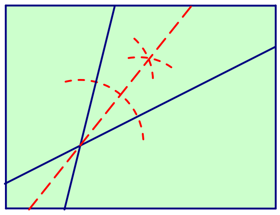
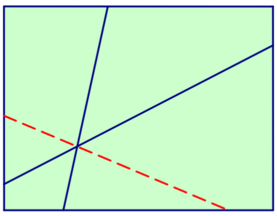
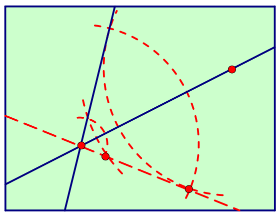
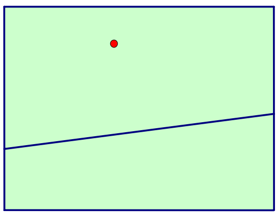
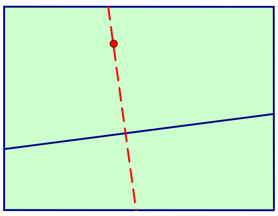
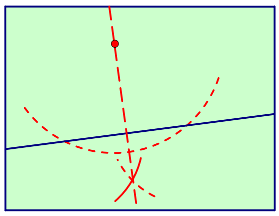
如圖七，紙上有一直線 L 與 A、B 兩點，可將 A 點摺至直線 L 上（假設與 A' 點重合），且讓摺痕 M 線通過 B。當以摺痕 M 爲對稱軸時，A 點與 A' 點爲對稱點，且 $\overline{AB}=\overline{A'B}$ 。

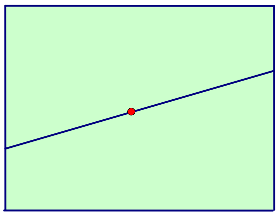
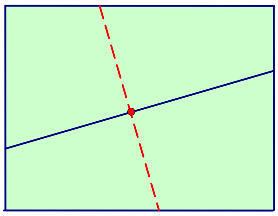
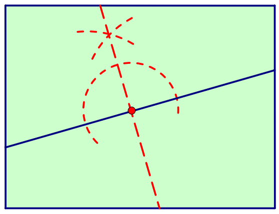
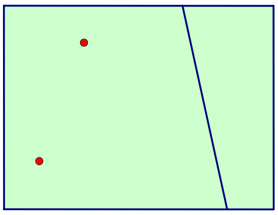
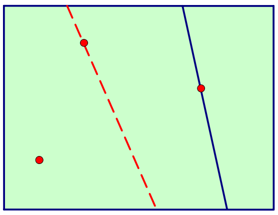
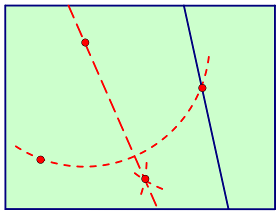


圖七. 符號 $A(A')$意指紙張摺疊時，A 點與 A'點重合。

二、摺紙動作對應之尺規作圖法

前一節介紹了摺紙作圖中可使用的 7 種動作，本節將討論如何將摺紙動作「轉譯」爲尺規作圖方法。很明顯地，**摺紙動作 1** 即等同於利用直尺畫出直線，**摺紙動作 2、3、5、6** 分別等同於「線段中垂線作圖」、「角平分線作圖」、與「垂線作圖的二種情形」，此四個作圖均屬尺規作圖的基本方法，在此不再詳述其作圖原理，至於摺紙動作與其相對應的尺規作法則請參見圖八。必須一提的是，並非所有的摺紙動作都有對應的尺規作圖方法，其實除了上述 7 種基本的摺紙動作之外，還有另外一種基本的摺紙動作，但因與本文所欲介紹的無關，所以在此不作贅述。

情境	摺紙動作	尺規作法
已知兩點 	動作 1.　摺出一直線 	
	動作 2.　兩點重合 	
已知兩直線 	動作 3.　兩線重合 	
	動作 4.　摺疊再摺疊 	
已知一直線與線外一點 	動作 5.　線外一點作垂線 	

已知一直線與線上一點	動作 6.　線上一點作垂線	
		
已知兩定點及一直線	動作 7.　一點到一線，摺線過一點	
		

圖八.　摺紙動作對應之尺規作圖方法

以下先將**摺紙動作 4 與 7** 改寫成作圖題型式，其作圖步驟即為摺紙動作「轉譯」為尺規作圖的方法，當然，作圖的方法可能有很多種，以下的作圖法僅供參考。

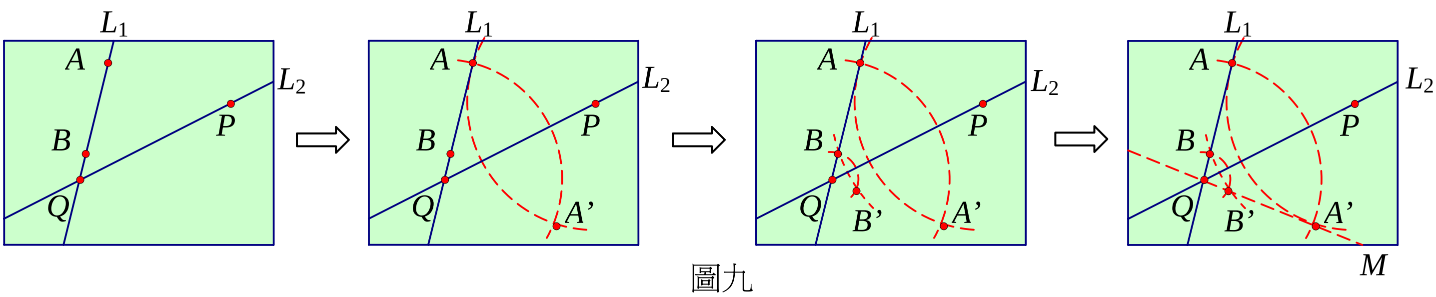
摺紙動作 4： 摺疊再摺疊

已知：L_1 與 L_2 兩直線，且兩直線相交於 Q 點

求作：直線 M，使得以 L_2 為對稱軸時， L_1 與 M 為對稱直線

作法：

1. 參圖九，在 L_1 上任取 A、B 兩點，在 L_2 上任取一點 P；
2. 分別以 P、Q 為圓心，$\overline{PA}$ 、$\overline{QA}$ 為半徑畫弧，設兩弧交於 A' 點；
3. 分別以 P、Q 為圓心，$\overline{PB}$ 、$\overline{QB}$ 為半徑畫弧，設兩弧交於 B' 點；
4. 畫出直線 $\overline{A'B'}$ ，直線 $\overline{A'B'}$ 即為所求的直線 M。



圖九

分析：　由作法中第 2 步驟可知$\overline{PA}=\overline{PA'}$且$\overline{QA}=\overline{QA'}$，故四邊形 $PAQA'$ 形成鳶形，A 與 A' 形成以 L_2 爲對稱軸的對稱點。同理可得 B 與 B' 亦爲對稱點，因此，直線$\overline{A'B'}$與 L_1 爲對稱直線。

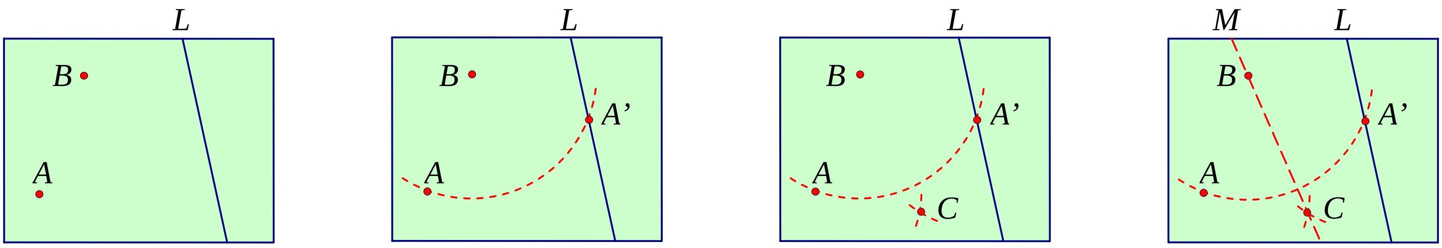
摺紙動作 7.　一點到一線，摺線過一點

已知：A、B 兩點與直線 L

求作：直線 M，使得 B 點在直線 M 上，且以直線 M 爲對稱軸時，A 點的對稱點在直線 L 上

作法：

1. 參圖十，以 B 點爲圓心，$\overline{AB}$ 爲半徑畫弧，設該弧與直線 L 交於 A' 點；
2. 分別以 A、 A' 爲圓心，大於$\frac{1}{2}\overline{AA'}$爲半徑畫弧，設兩弧交於 C 點；
3. 畫出直線$\overline{BC}$，直線$\overline{BC}$即爲所求的直線 M。



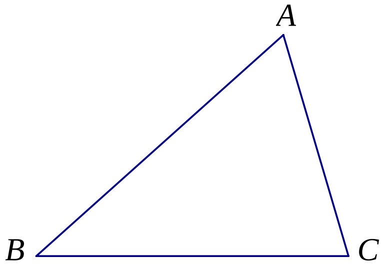
圖十

分析：由作法中第 1、2 步驟可分別得知$\overline{AB}=\overline{A'B}$且$\overline{AC}=\overline{A'C}$，故四邊形 $ABA'C$ 爲對稱圖形鳶形，其對角線$\overline{BC}$爲對稱軸。

三、摺紙作圖實例

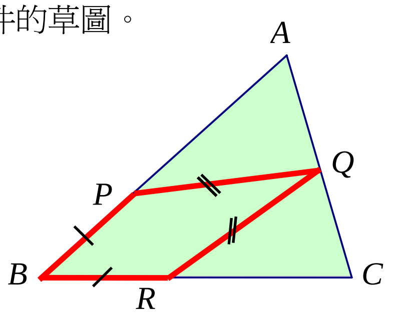
以下利用一個實例說明可如何透過摺紙過渡到解決尺規作圖問題，讀者在繼續閱讀之前，可分別嘗試使用摺紙與尺規兩種作法，親自比較其中的差異，藉此探討摺紙是否可以幫助學生學習尺規作圖。

問題 1：如圖十一，已知△ABC，請利用尺規作圖作出鳶形$BPQR$，使得P、Q、R分別在$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$上。



圖十一

思考作圖問題的第一步是畫一個符合題目條件的草圖，接著尋找已知條件與隱藏於草圖中未知條件的連結，圖十二爲符合上述問題條件的草圖。



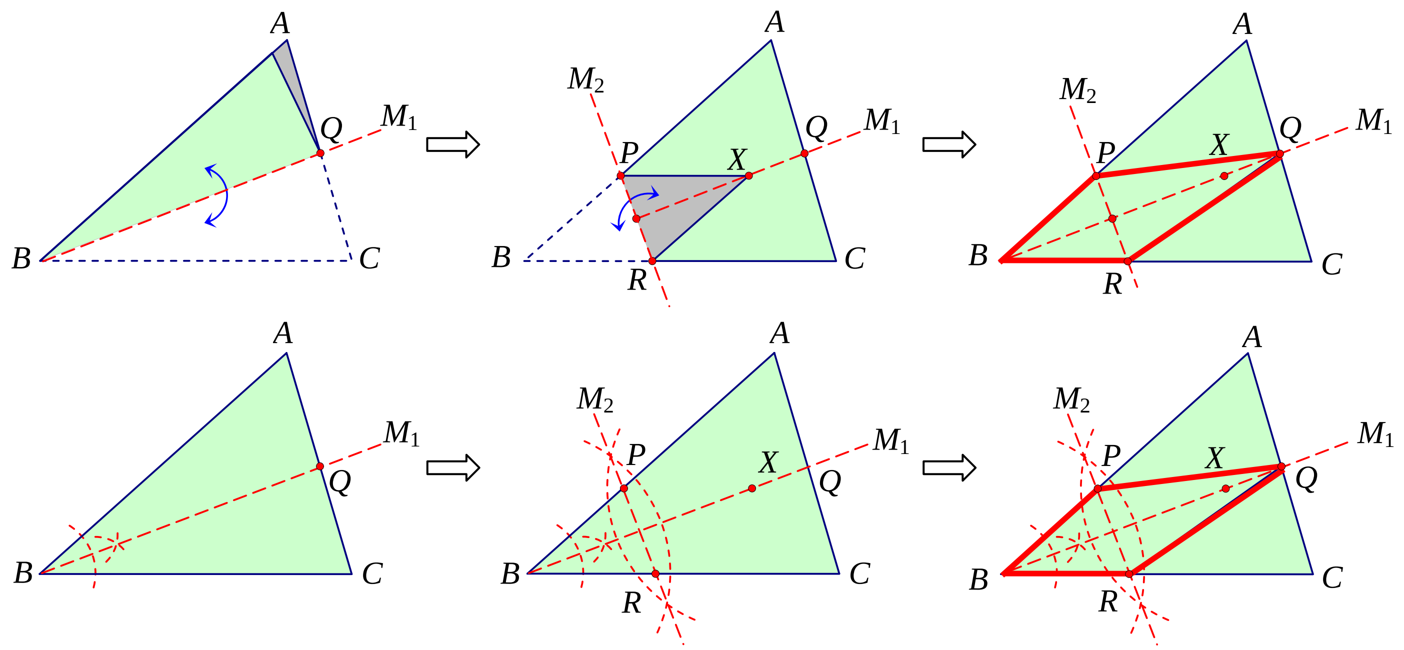
圖十二. 符合問題 1 條件的草圖，其中四邊形 $BPQR$ 爲鳶形。

很顯然地，學生的解題思路深受作圖工具特性的影響，由於繪製等線段是圓規的基本功能，草圖上 $\overline{BP}=\overline{BR}$ 與 $\overline{PQ}=\overline{QR}$ 兩個資訊變得格外明顯，因此，學生作圖的第一步驟可能是以 B 點爲圓心，任意長爲半徑畫弧，找出 P、R 兩點；第二步驟則試圖分別以 P、R 爲圓心畫弧，但此時學生將發現兩弧的交點未必在 $\overline{AC}$ 上，有些學生可能重複修正圓規張開的角度直到交點「落」在 $\overline{AC}$ 上，也可能因思路受阻而宣告放棄。反之，若給予學生一張三角形紙片，摺紙的特性會容易引導學生朝對稱性這方向做思考，進而聚焦於鳶形的對角線（對稱軸）上。待摺紙作圖完成，逐一將摺紙動作轉譯爲尺規動作，即可完成尺規作圖。參考解法如圖十三所示：

步驟 1. 利用**摺紙動作** 3 將 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AB}$ 重合得到摺痕 M_1，令 M_1 與 $\overline{AC}$ 交於 Q 點。

步驟 2. 在 $\overline{BQ}$ 上任取一點 X，利用**摺紙動作** 2 將 B、X 兩點重合得到摺痕 M_2，令 M_2 與 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 分別交於 P、R 兩點。

步驟 3. 重複利用**摺紙動作** 1 摺出線段 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{QR}$，四邊形 $BPQR$ 爲所求。

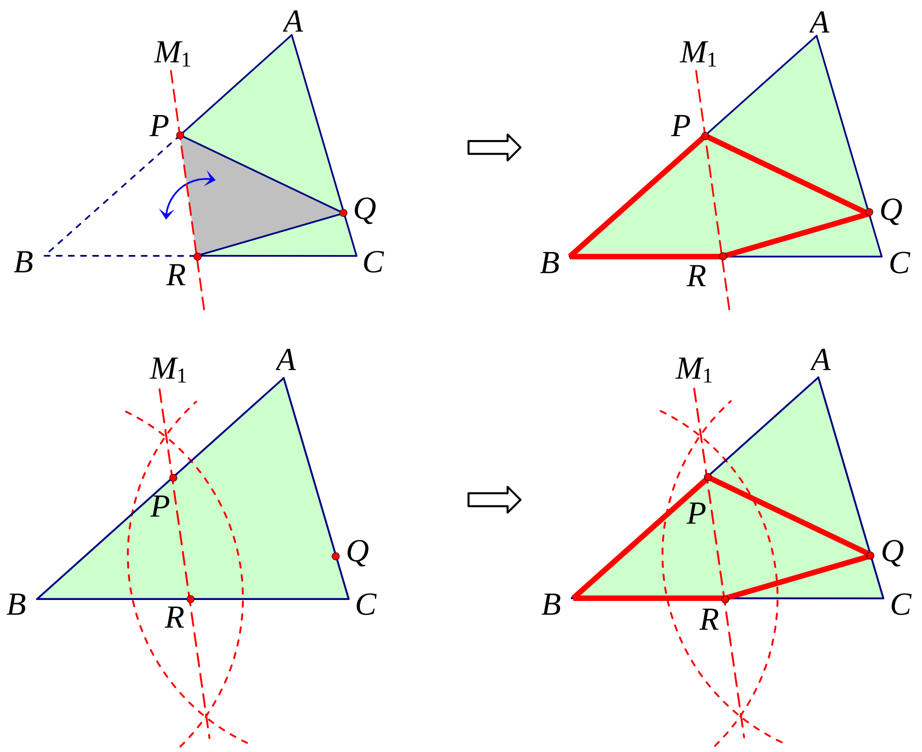


圖十三.

摺紙的動手實作特性可能造成學生排斥畫草圖，而喜歡於操作中思考，但這種方式並非全無益處，有時甚至可引發十分直覺的作法，以上一個問題爲例，若不畫草圖直接操作三角形紙片，學生極有可能嘗試將 B 點往 $\overline{AC}$ 摺疊，進而聯想到摺疊後可產生兩個全等三角形，此即形成符合題目要求的鳶形。參考解法如圖十四所示：

步驟 1.　在 $\overline{AC}$ 上任選一點 Q，利用**摺紙動作** 2 將 B、Q 兩點重合得到摺痕 M_1。令 M_1 與 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 分別交於 P、R 兩點。

步驟 2.　重複利用**摺紙動作** 1 摺出線段 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{QR}$ ，四邊形 $BPQR$ 爲所求。



圖十四.

結語

尺規作圖的工具限制大大增加了作圖遊戲的趣味性，但也令許多學生很快遇到作圖上的瓶頸，因爲他們再也不能使用直尺的刻度測量，再也不能經由目測畫出直角，儘管這些動作看起來已經十分精準。經由摺紙學習作圖，學生可輕易跨過作圖遊戲前受到工具使用限制所帶來的障礙，提早進入遊戲中探索圖形的性質。因此，或許學習尺規作圖並不一定要從基本作圖開始，讓我們先將直尺與圓規放一旁，從一張紙開始摺起來吧！如果要兼顧環保的話，還可以先從住家信箱內的廣告紙張開始，說不定紙源會相當充足。